§3. 曲線

区間 I で定義されたスカラー値関数 f を考えよう．微分積分においても扱うように，f はグラフ

$$\{(t, f(t)) \,|\, t \in I\}$$

と同一視することができる．スカラー値関数のグラフは平面上の曲線を表すが，平面上の曲線はグラフとして表されるものばかりではない．

まず，2 変数のスカラー値関数 g を用いて，x, y の方程式

$$g(x, y) = 0$$

をみたす点 (x, y) 全体の集合として曲線が表される場合がある．これを曲線の陰関数表示という．例えば，原点中心，半径 1 の円は集合

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$$

として表されるから，

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

とおけばよい．また，スカラー値関数 f のグラフの場合は

$$g(x, y) = y - f(x)$$

とおけばよい．

次に，区間で定義された $\mathbf{R}^2$ に値をとる関数の像として曲線が表される場合がある．これを曲線の径数表示という．径数表示においてはベクトル値関数の像としての曲線とそれを表す写像を同一視することが多い．例えば，閉区間 $[0, 2\pi]$ で定義された $\mathbf{R}^2$ に値をとる関数 F を

$$F(t) = (\cos t, \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定めると，F の像，すなわち，集合

$$\{F(t) \,|\, t \in [0, 2\pi]\}$$

は原点中心，半径 1 の円である．また，区間 I で定義されたスカラー値関数 f のグラフの場合は I から $\mathbf{R}^2$ への写像 F を

$$F(t) = (t, f(t)) \quad (t \in I)$$

により定めればよい．

ここでは，区間で定義されたベクトル値関数を上のように幾何的に捉え，次のように定義しよう．

定義 3.1　区間で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとる関数を $\mathbf{R}^n$ 内の曲線という．特に，$n = 2$, $n = 3$ のとき，それぞれ平面曲線，空間曲線という．

定義 3.1 で定めた曲線を扱う際には，現れる関数は微分可能である方がよい．微分という手段を用いて曲線を調べることができるからである．以下では，関数は必要に応じて微分可能であるとする．

簡単のため，平面曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

を考えよう. なお, 曲線を表すベクトル値関数は γ という記号を用いることにする. I の元を時刻を表すパラメータとみなすと, 曲線 γ は時刻とともに平面上の点が動いて得られる軌跡とみなすことができる. このとき, γ を微分して得られるベクトル値関数

$$\gamma' : I \to \mathbf{R}^2$$

を考えると, 各 $t \in I$ に対して, $\gamma'(t)$ は点 $\gamma(t)$ における速度ベクトルを表す. $\gamma'(t) = 0$ となる点 $\gamma(t)$ においては, 動いていた点は一旦立ち止まり, 更に時刻が進むとすでに動いてきたところを逆戻りする可能性がある. ベクトル値関数の像としての曲線を扱う場合にはこのような状況は除いておいた方がよい. そこで次のような曲線を考える.

定義 3.2　$\mathbf{R}^n$ 内の曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^n$$

は任意の $t \in I$ に対して, $\gamma'(t) \neq 0$ となるとき, 正則であるという.

以下では特に断らない限り, 正則な曲線を考え, 単に曲線ということにする. Taylor の定理より, $\mathbf{R}^n$ 内の曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^n$$

は $t_0 \in I$ の近くにおいて

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + R$$

と表すことができる. ここでは, γ は $t = t_0$ で少なくとも 2 回は微分可能であるとしている. また, R は剰余項である. 曲線は正則であるとしているから, $\gamma'(t_0) \neq 0$ であり, 剰余項を取り除いて得られる式

$$l(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) \quad (t \in \mathbf{R})$$

は曲線 γ の $t = t_0$ における接線の径数表示である.

例 3.1　区間 I で定義されたスカラー値関数 f のグラフは

$$\gamma(t) = (t, f(t)) \quad (t \in I)$$

により定められる平面曲線 γ であり,

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (1, f'(t)) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

である. よって, γ は正則である.

$t_0 \in I$ とすると, γ の $t = t_0$ における接線の径数表示は

$$l(t) = (t_0, f(t_0)) + (1, f'(t_0))(t - t_0) \quad (t \in \mathbf{R})$$

である. ここで,

$$l(t) = (x, y)$$

とおくと,

$$(x, y) = (t_0 + t - t_0, f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0))$$

である. したがって,

$$y = f(t_0) + f'(t_0)(x - t_0)$$

である.

例 3.2 (直線) $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^n$ とし, 曲線

$$\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$$

を

$$\gamma(t) = \alpha t + \beta \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める. $\alpha = 0$ のときは γ の像は 1 点 β となるので, $\alpha \neq 0$ としよう. このとき, γ は直線を表す. 直線は直感的には曲がっていないが, 定義に従えばこれも曲線である. また,

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \alpha \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

だから, γ は正則である. 更に, γ の任意の点における接線は γ 自身に他ならない.

例 3.3 (楕円) $a, b > 0$ とする. 陰関数表示を用いて表される平面曲線

$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

を楕円という. 特に, $a = b$ のときは原点中心, 半径 a の円である.

ここで, $t \in [0, 2\pi]$ に対して,

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \frac{a^2 \cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 t}{b^2} \\ &= \cos^2 t + \sin^2 t \\ &= 1 \end{aligned}$$

である. よって, 径数表示を用いて平面曲線

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定めると, γ も同じ楕円を表す. また,

$$\gamma'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$$

だから,

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|^2 &= a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t \\ &> 0 \end{aligned}$$

である. よって, $\gamma'(t) \neq 0$ となり, γ は正則である.

問題 3

1. a, $b>0$ とし, 楕円

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定める.
(1) $t_0 \in [0, 2\pi]$ とすると, γ の $t = t_0$ における接線の陰関数表示は

$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; \frac{\cos t_0}{a}x + \frac{\sin t_0}{b}y = 1 \right\}$$

であることを示せ.
(2) $a > b$ とし, $\mathrm{A}(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, $\mathrm{B}(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ とおく. P を上の楕円上の点とすると, 線分 AP と線分 BP の長さの和は P に依存しない定数であることを示せ.

2. a, $b > 0$ とする. 陰関数表示を用いて表される平面曲線

$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

を双曲線という. 径数表示を用いて平面曲線

$$\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (a\cosh t, b\sinh t) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定めると, γ は上の双曲線の $x > 0$ の部分を表すことが分かる.
(1) γ は正則であることを示せ.
(2) $t_0 \in \mathbf{R}$ とすると, γ の $t = t_0$ における接線の陰関数表示は

$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; \frac{\cosh t_0}{a}x - \frac{\sinh t_0}{b}y = 1 \right\}$$

であることを示せ.

3. $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ とする. スカラー値関数 ax^2 のグラフを放物線という. P をこの放物線上の任意の点とすると, P と点 $\left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$ の距離は P と直線 $y = -\dfrac{1}{4a}$ の距離に等しいことを示せ.

問題 3 の解答

1. (1) γ の $t=t_0$ における接線の径数表示は

$$l(t) = (a\cos t_0, b\sin t_0) + (-a\sin t_0, b\cos t_0)(t-t_0) \quad (t \in \mathbf{R})$$

である．ここで,

$$l(t) = (x, y)$$

とおくと,

$$x = a\cos t_0 - (a\sin t_0)(t-t_0), \quad y = b\sin t_0 + (b\cos t_0)(t-t_0)$$

である．このとき,

$$\begin{aligned} \frac{\cos t_0}{a}x + \frac{\sin t_0}{b}y &= \frac{\cos t_0}{a}\{a\cos t_0 - (a\sin t_0)(t-t_0)\} \\ &\quad + \frac{\sin t_0}{b}\{b\sin t_0 + (b\cos t_0)(t-t_0)\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるから, 陰関数表示

$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; \frac{\cos t_0}{a}x + \frac{\sin t_0}{b}y = 1 \right\}$$

を得る．

(2) P は $t \in [0, 2\pi]$ を用いて $\mathrm{P}(a\cos t, b\sin t)$ と表すことができるから,

$$\begin{aligned} \mathrm{AP} + \mathrm{BP} &= \sqrt{\left(\sqrt{a^2-b^2} - a\cos t\right)^2 + (0 - b\sin t)^2} \\ &\quad + \sqrt{\left(-\sqrt{a^2-b^2} - a\cos t\right)^2 + (0 - b\sin t)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - b^2 - 2a\sqrt{a^2-b^2}\cos t + a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} \\ &\quad + \sqrt{a^2 - b^2 + 2a\sqrt{a^2-b^2}\cos t + a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} \\ &= \sqrt{a^2 - 2a\sqrt{a^2-b^2}\cos t + (a^2-b^2)\cos^2 t} \\ &\quad + \sqrt{a^2 + 2a\sqrt{a^2-b^2}\cos t + (a^2-b^2)\cos^2 t} \\ &= \sqrt{(a - \sqrt{a^2-b^2}\cos t)^2} + \sqrt{(a + \sqrt{a^2-b^2}\cos t)^2} \end{aligned}$$

である．$a > b > 0$, $-1 \le \cos t \le 1$ に注意すると,

$$\begin{aligned} \mathrm{AP} + \mathrm{BP} &= a - \sqrt{a^2-b^2}\cos t + a + \sqrt{a^2-b^2}\cos t \\ &= 2a \end{aligned}$$

となり, この値は P に依存しない．

2. (1) $t \in \mathbf{R}$ とすると,

$$\gamma'(t) = (a\sinh t, b\cosh t)$$

である．ここで，$\cosh t > 0$ だから，$\gamma'(t) \neq 0$ である．よって，γ は正則である．

(2) γ の $t = t_0$ における接線の径数表示は

$$l(t) = (a\cosh t_0, b\sinh t_0) + (a\sinh t_0, b\cosh t_0)(t - t_0) \quad (t \in \mathbf{R})$$

である. ここで,

$$l(t) = (x, y)$$

とおくと,

$$x = a\cosh t_0 + (a\sinh t_0)(t - t_0), \quad y = b\sinh t_0 + (b\cosh t_0)(t - t_0)$$

である. このとき,

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

より,

$$\begin{aligned} \frac{\cosh t_0}{a}x - \frac{\sinh t_0}{b}y &= \frac{\cosh t_0}{a}\left\{a\cosh t_0 + (a\sinh t_0)(t - t_0)\right\} \\ &\quad - \frac{\sinh t_0}{b}\left\{b\sinh t_0 + (b\cosh t_0)(t - t_0)\right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるから, 陰関数表示

$$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; \frac{\cosh t_0}{a}x - \frac{\sinh t_0}{b}y = 1\right\}$$

を得る.

3. P の座標を (x, y) とする. P と点 $\left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$ の距離を L とおくと,

$$\begin{aligned} L^2 &= (x - 0)^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2 \\ &= x^2 + y^2 - \frac{1}{2a}y + \frac{1}{16a^2} \\ &= \frac{1}{a}y + y^2 - \frac{1}{2a}y + \frac{1}{16a^2} \\ &= \left(y + \frac{1}{4a}\right)^2 \end{aligned}$$

である. よって,

$$L = \left|y + \frac{1}{4a}\right|$$

である．右辺は P と直線 $y = -\dfrac{1}{4a}$ の距離に等しいから，題意がなりたつ.