§6. 線積分と Green の定理

$\mathbf{R}^n$ 内の曲線とその曲線上で定義されたスカラー場またはベクトル場に対して, 線積分というものを考えることができる.

まず, スカラー場の線積分から定義しよう.

定義 6.1　$\mathbf{R}^n$ 内の曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$$

および γ の像で連続なスカラー場 f に対して,

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt$$

とおき, これを f の γ 上の線積分という.

注意 6.1　定義 6.1 において, 特に, $f = 1$ とすると, 上の線積分の値は γ の長さに等しい. また, 曲線の長さの場合と同様に, 線積分の値は曲線の径数表示に依存しないことが分かる.

例 6.1　$a > 0$ とし, 平面曲線

$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t) \quad (t \in [0, \pi])$$

により定める. このとき,

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}\\ &= a\end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned}\int_\gamma x\,ds &= \int_0^\pi (a\cos t)a\,dt\\ &= [a^2\sin t]_0^\pi\\ &= 0\end{aligned}$$

である.

次に, ベクトル場の線積分を定義するために, 曲線に対して向きというものを考えよう.

定義 6.2　$\mathbf{R}^n$ 内の曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$$

に対して, γ の像の点 $\gamma(a)$ が γ に沿って点 $\gamma(b)$ まで進むと考えるとき,

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n, \text{ 向き } t : a \to b$$

と表す. このとき, γ を向き付けられた曲線という.

それでは, ベクトル場の線積分を定義しよう.

定義 6.3　向き付けられた $\mathbf{R}^n$ 内の曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n, \text{ 向き } t : a \to b$$

および γ の像で連続な n 次元ベクトル場 F に対して,

$$\int_\gamma F\,\overrightarrow{ds} = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt$$

とおき, これを F の γ 上の線積分という.

注意 6.2 1 つの曲線に対しては 2 通りの向きが定まる. 定義 6.2 の γ とは逆向きの曲線を $\overline{\gamma}$ と表すことにする. 定義 6.3 において, ベクトル場の線積分の値は曲線の向きを変えると符号が変わることが分かる. すなわち,

$$\int_{\overline{\gamma}} F\,\overrightarrow{ds} = -\int_\gamma F\,\overrightarrow{ds}$$

である. しかし, 向きを保つ変数変換に対しては, ベクトル場の線積分の値は変わらないことが分かる. よって, ベクトル場の線積分は曲線の像とその向きのみによって定まる.

例 6.2 向き付けられた平面曲線

$$\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\, t : 0 \to 1$$

を

$$\gamma(t) = (t, t^2) \quad (t \in [0,1])$$

により定め, ベクトル場

$$F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

を

$$F(x,y) = (x, -y) \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2)$$

により定める. このとき,

$$\begin{aligned}\int_\gamma F\,\overrightarrow{ds} &= \int_0^1 \langle (t, -t^2), (1, 2t)\rangle\, dt \\ &= \int_0^1 (t - 2t^3)\, dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^4\right]_0^1 \\ &= 0\end{aligned}$$

である.

最後に, 2 次元ベクトル場の線積分に関する Green の定理について述べよう. D を境界が有限個の区分的に C^1 級の平面曲線の和集合となるような $\mathbf{R}^2$ の有界な領域とする. ただし, D の境界には D の内部が進行方向の左手となるように向きを定めておき, これを ∂D と表す. また, 例 5.5 で述べたように, C^1 級の 2 次元ベクトル場に対しては回転というスカラー場を考えることができたことを思い出そう.

定理 6.1 (Green の定理) F を D 上の C^1 級の 2 次元ベクトル場とすると,

$$\int_{\partial D} F\,\overrightarrow{ds} = \iint_D \operatorname{rot} F\, dxdy$$

がなりたつ.

証明　F は
$$F = (P, Q)$$
と表すことができる. 積分の線形性より, $P = 0$ の場合と $Q = 0$ の場合に分けて考えればよい. 以下, $Q = 0$ であり, D が
$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$
と表される場合のみ示す.

向き付けられた平面曲線
$$\begin{aligned}
&\gamma_1 : [a, b] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\, t : a \to b, \quad \gamma_2 : [\varphi_1(b), \varphi_2(b)] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\, t : \varphi_1(b) \to \varphi_2(b),\\
&\gamma_3 : [a, b] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\, t : b \to a, \quad \gamma_4 : [\varphi_1(a), \varphi_2(a)] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\, t : \varphi_2(a) \to \varphi_1(a)
\end{aligned}$$
をそれぞれ
$$\begin{aligned}
&\gamma_1(t) = (t, \varphi_1(t)) \quad (t \in [a, b]), \quad \gamma_2(t) = (b, t) \quad (t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)]),\\
&\gamma_3(t) = (t, \varphi_2(t)) \quad (t \in [a, b]), \quad \gamma_4(t) = (a, t) \quad (t \in [\varphi_1(a), \varphi_2(a)])
\end{aligned}$$
により定める. ここで,
$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} F\,\overrightarrow{ds} &= \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} \langle (P(\gamma_2(t)), 0), (0, 1) \rangle \, dt\\
&= \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} 0\, dt\\
&= 0
\end{aligned}$$
である. 同様に,
$$\int_{\gamma_4} F\,\overrightarrow{ds} = 0$$
である. よって,
$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} F\,\overrightarrow{ds} &= \int_{\gamma_1} F\,\overrightarrow{ds} + \int_{\gamma_2} F\,\overrightarrow{ds} + \int_{\gamma_3} F\,\overrightarrow{ds} + \int_{\gamma_4} F\,\overrightarrow{ds}\\
&= \int_{\gamma_1} F\,\overrightarrow{ds} + \int_{\gamma_3} F\,\overrightarrow{ds}\\
&= \int_a^b \langle (P(\gamma_1(t)), 0), (1, \varphi_1'(t)) \rangle \, dt + \int_b^a \langle (P(\gamma_3(t)), 0), (1, \varphi_2'(t)) \rangle \, dt\\
&= -\int_a^b (P(t, \varphi_2(t)) - P(t, \varphi_1(t)))\, dt\\
&= -\int_a^b [P(x, y)]_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)}\, dx\\
&= -\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\\
&= -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy\\
&= \iint_D \operatorname{rot} F\, dxdy
\end{aligned}$$
である. したがって, Green の定理がなりたつ. □

問題 6

1. $a > 0$ とし, 平面曲線

$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t) \quad (t \in [0, \pi])$$

により定める. $\mathbf{R}^2$ 上のスカラー場 f を次の (1), (2) のように定めるとき, 線積分 $\displaystyle\int_\gamma f\,ds$ の値を求めよ.

(1) $f(x, y) = y$ $((x, y) \in \mathbf{R}^2)$.
(2) $f(x, y) = x^2$ $((x, y) \in \mathbf{R}^2)$.

2. D を境界が有限個の区分的に C^1 級の平面曲線の和集合となる $\mathbf{R}^2$ の有界な領域とし, D 上の 2 次元ベクトル場 F を

$$F(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x) \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

により定める.

(1) 線積分 $\displaystyle\int_{\partial D} F\,\overrightarrow{ds}$ は D の面積に等しいことを示せ. なお, $F(x, y) = (0, x)$ または $F(x, y) = (-y, 0)$ のときも上の線積分は D の面積に等しいことが分かる.

(2) $a, b > 0$ とする. D が楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

により囲まれた領域のとき, D の面積を求めよ.

(3) $a > 0$ とする. D がアステロイド

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

により囲まれた領域のとき, D の面積を求めよ.

3. $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の 2 次元ベクトル場 F を

$$F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right) \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$$

により定める.

(1) $\operatorname{rot} F = 0$ を示せ.

(2) 向き付けられた平面曲線

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\ t : 0 \to 2\pi$$

を

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定める. 線積分 $\displaystyle\int_\gamma F\,\overrightarrow{ds}$ の値を求めよ.

問題 6 の解答

1. 例 6.1 より, $\|\gamma'(t)\| = a$ である.
(1) 求める値は

$$\begin{aligned}\int_\gamma y\,ds &= \int_0^\pi (a\sin t)a\,dt\\ &= [-a^2\cos t]_0^\pi\\ &= a^2+a^2\\ &= 2a^2\end{aligned}$$

である.
(2) 求める値は

$$\begin{aligned}\int_\gamma x^2\,ds &= \int_0^\pi (a^2\cos^2 t)a\,dt\\ &= a^3\int_0^\pi \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt\\ &= a^3\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^\pi\\ &= \frac{\pi}{2}a^3\end{aligned}$$

である.

2. (1) Green の定理より,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} F\,\overrightarrow{ds} &= \iint_D \mathrm{rot}\,F\,dxdy\\ &= \iint_D \left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}dxdy\\ &= \iint_D dxdy\end{aligned}$$

となり, これは D の面積である.
(2) 向き付けられた平面曲線

$$\gamma : [0,2\pi]\to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\ t: 0\to 2\pi$$

を

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t) \quad (t\in[0,2\pi])$$

により定めると, γ は題意の楕円を表す. このとき, (1) より, D の面積は

$$\begin{aligned}\int_\gamma F\,\overrightarrow{ds} &= \int_0^{2\pi}\left\langle \frac{1}{2}(-b\sin t, a\cos t), (-a\sin t, b\cos t)\right\rangle dt\\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt\\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt\\ &= \pi ab\end{aligned}$$

である.

(3) 向き付けられた平面曲線

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2,\ \text{向き}\ t : 0 \to 2\pi$$

を

$$\gamma(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定めると, γ は題意のアステロイドを表す. このとき, (1) より, D の面積は

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F\,\overrightarrow{ds} &= \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{1}{2}(-a\sin^3 t, a\cos^3 t), (-3a\cos^2 t\sin t, 3a\sin^2 t\cos t) \right\rangle dt \\
&= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt \\
&= \frac{3a^2}{2}\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)(1 - \sin^2 t)\,dt \\
&= 6a^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,dt\right) \\
&= 6a^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{3}{8}\pi a^2
\end{aligned}$$

である.

3. (1) 直接計算すると,

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} F &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) \\
&= \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1\cdot(x^2+y^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

である.

(2) 求める値は

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F\,\overrightarrow{ds} &= \int_0^{2\pi} \left\langle \left(-\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\right), (-\sin t, \cos t) \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} dt \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

である.