§11. Stokes の定理

ここでは, 面積分に関する Stokes の定理について述べよう. D を $\mathbf{R}^2$ の面積確定な領域とし, D の境界は曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

の像として表されているとする. 線積分を考えるため, γ には §6 において述べたように, D の内部が進行方向の左手となるように向きを定めておく. また, 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

があたえられているとする. このとき, 空間曲線 $p \circ \gamma$ の像は曲面 p の像の境界となるが, $p \circ \gamma$ の向きは γ の向きに合わせておく. このとき, 次がなりたつ.

定理 11.1 (Stokes の定理)　F を p の像の近くで C^1 級の 3 次元ベクトル場とすると,

$$\iint_p \mathrm{rot}\, F\, \overrightarrow{dA} = \int_{p \circ \gamma} F\, \overrightarrow{ds}$$

がなりたつ.

証明　まず, p が D で定義された 2 変数のスカラー値関数

$$f : D \to \mathbf{R}$$

のグラフとして表され, F がスカラー場 φ を用いて

$$F = (\varphi,\, 0,\, 0)$$

と表されているときを考える. このとき,

$$\begin{aligned}
\iint_p \mathrm{rot}\, F\, \overrightarrow{dA} &= \iint_D \langle (\mathrm{rot}\, F)(p(u, v)), p_u \times p_v \rangle\, dudv \\
&= \iint_D \langle (0,\, \varphi_z(p(u, v)),\, -\varphi_y(p(u, v))), (-f_u,\, -f_v,\, 1) \rangle\, dudv \\
&= -\iint_D (\varphi_z(p(u, v)) f_v + \varphi_y(p(u, v)))\, dudv
\end{aligned}$$

である. また, D 上の 2 次元ベクトル場 G を

$$G(u, v) = (\varphi(p(u, v)), 0) \quad ((u, v) \in D)$$

により定めると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\, G &= -\frac{\partial}{\partial v} \varphi(p(u, v)) \\
&= -\frac{\partial}{\partial v} \varphi(u, v, f(u, v)) \\
&= -(\varphi_y(p(u, v)) + \varphi_z(p(u, v)) f_v)
\end{aligned}$$

である. ここで, 必要ならば径数表示を変えることにより, γ および $p \circ \gamma$ の向きは $t : a \to b$ としてよい. 更に,

$$\gamma(t) = (u(t), v(t)) \quad (t \in [a, b])$$

と表しておくと, Green の定理より,

$$\begin{aligned}\iint_p \mathrm{rot}\, F\, \overrightarrow{dA} &= \iint_D \mathrm{rot}\, G\, dudv \\ &= \int_\gamma G\, \overrightarrow{ds} \\ &= \int_a^b \langle G(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt \\ &= \int_a^b \langle (\varphi(p(\gamma(t))), 0), (u'(t), v'(t))\rangle\, dt \\ &= \int_a^b \varphi(p(\gamma(t)))u'(t)\, dt\end{aligned}$$

である. 一方,

$$\begin{aligned}\int_{p\circ\gamma} F\, \overrightarrow{ds} &= \int_a^b \langle F((p\circ\gamma)(t)), (p\circ\gamma)'(t)\rangle\, dt \\ &= \int_a^b \langle (\varphi(p(\gamma(t))),\, 0,\, 0), (u'(t),\, v'(t),\, (f\circ\gamma)'(t))\rangle\, dt \\ &= \int_a^b \varphi(p(\gamma(t)))u'(t)\, dt\end{aligned}$$

である. よって, Stokes の定理がなりたつ.

次に, p が一般の曲面であり, F が上のように表されているときを考える. このとき, 曲面をグラフに分割しておくと, 分割された各グラフにおいて Stokes の定理がなりたつ. また, 各グラフの境界のうち D の内部にあるものの像については, 向きが逆のものが対で現れるから, それらに沿った線積分の値は 0 となる. したがって, Stokes の定理がなりたつ.

更に, p と F が一般のときを考える. F を

$$F = (F_1,\, F_2,\, F_3)$$

と表しておくと,

$$\iint_p \mathrm{rot}\,(F_1,\, 0,\, 0)\, \overrightarrow{dA} = \int_{p\circ\gamma} (F_1,\, 0,\, 0)\, \overrightarrow{ds}$$

である. 同様に,

$$\iint_p \mathrm{rot}\,(0,\, F_2,\, 0)\, \overrightarrow{dA} = \int_{p\circ\gamma} (0,\, F_2,\, 0)\, \overrightarrow{ds},$$

$$\iint_p \mathrm{rot}\,(0,\, 0,\, F_3)\, \overrightarrow{dA} = \int_{p\circ\gamma} (0,\, 0,\, F_3)\, \overrightarrow{ds}$$

である. これらを合わせると, Stokes の定理がなりたつ. □

例 11.1　D を

$$D = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 + v^2 \le 1\}$$

により定められる $\mathbf{R}^2$ の領域, f を

$$f(u, v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2} \quad ((u, v) \in D)$$

により定められる 2 変数のスカラー値関数とし, 原点中心, 半径 1 の球面の一部

$$p : D \to \mathbf{R}^3 \quad ((u,v) \in D)$$

を f のグラフ

$$p(u,v) = (u,\, v,\, f(u,v)) \quad ((u,v) \in D)$$

として表しておく.

また, 3 次元ベクトル場 F を

$$F(x,y,z) = (yz,\, -zx,\, 0) \quad ((x,\, y,\, z) \in \mathbf{R}^3)$$

により定める.

このとき, Stokes の定理がなりたつことを直接確かめてみよう. まず,

$$\mathrm{rot}\, F = (x,\, y,\, -2z)$$

である. また, §10 においても扱ったように,

$$p_u \times p_v = \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}},\, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}},\, 1 \right)$$

であり, 極座標変換を用いると, D は領域

$$E = \{(r,\theta) \,|\, 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

へ写される. よって,

$$\begin{aligned}
\iint_p \mathrm{rot}\, F\, \overrightarrow{dA} &= \iint_D \left\langle \left(u,\, v,\, -2\sqrt{1-u^2-v^2}\right), \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}},\, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}},\, 1 \right) \right\rangle dudv \\
&= \iint_D \left(\frac{u^2+v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}} - 2\sqrt{1-u^2-v^2} \right) dudv \\
&= \iint_E \left(\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} - 2\sqrt{1-r^2} \right) r\, drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}} - 2r\sqrt{1-r^2} \right) drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-r^2\sqrt{1-r^2} \right]_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 0\, d\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

である. 一方, γ を D の境界を表す曲線とすると, F の $p \circ \gamma$ の像における値は恒等的に零ベクトルであるから,

$$\int_{p\circ\gamma} F\, \overrightarrow{ds} = 0$$

である.

問題 11

1. D を

$$D = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$$

により定められる領域, f を

$$f(u,v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2} \quad ((u,v) \in D)$$

により定められる 2 変数のスカラー値関数とし, 原点中心, 半径 1 の球面の一部

$$p : D \to \mathbf{R}^3 \quad ((u,v) \in D)$$

を f のグラフ

$$p(u,v) = (u,\ v,\ f(u,v)) \quad ((u,v) \in D)$$

として表しておく. また, 自然数 n に対して 3 次元ベクトル場 F を

$$F(x,y,z) = (y^{n-1},\ z^{n-1},\ x^{n-1}) \quad ((x,\ y,\ z) \in \mathbf{R}^3)$$

により定める. Stokes の定理を用いて, 面積分 $\displaystyle\iint_p \mathrm{rot}\, F\, \overrightarrow{dA}$ の値を求めよ.

2. D を $\mathbf{R}^2$ の面積確定な領域とし, D の境界は曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$$

の像として表されているとする. また, 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

があたえられているとする.

(1) $a \in \mathbf{R}^3$ とすると,

$$\iint_{p\circ\gamma} a \times (p \circ \gamma)\, \overrightarrow{ds} = 2 \int_p a\, \overrightarrow{dA}$$

がなりたつことを示せ.

(2) f, g を p の像の近くで C^1 級のスカラー場とすると,

$$\int_{p\circ\gamma} f\, \mathrm{grad}\, g\, \overrightarrow{ds} = \iint_p \mathrm{grad}\, f \times \mathrm{grad}\, g\, \overrightarrow{dA}$$

がなりたつことを示せ.

(3) 例 5.6 で述べた Maxwell の方程式の第 2 式

$$\mathrm{rot}\, E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

から Faraday の電磁誘導の法則

$$\int_{p\circ\gamma} E\, \overrightarrow{ds} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_p B\, \overrightarrow{dA}$$

を導け.

問題11の解答

1. γ を D の境界を表す曲線とすると,

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

であり,

$$(p \circ \gamma)(t) = (\cos t,\ \sin t,\ 0)$$

である. よって, Stokesの定理より,

$$\begin{aligned}
\iint_p \mathrm{rot}\, F\, \overrightarrow{dA} &= \int_{p\circ\gamma} F\, \overrightarrow{ds} \\
&= \int_0^{2\pi} \langle F((p\circ\gamma)(t)), (p\circ\gamma)'(t)\rangle\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \langle (\sin^{n-1} t,\ 0,\ \cos^{n-1} t), (-\sin t,\ \cos t,\ 0)\rangle\, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} \sin^n t\, dt \\
&= \begin{cases} 0 & (n\ \text{は奇数}), \\ -4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt & (n\ \text{は偶数}) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & (n\ \text{は奇数}), \\ -4\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & (n\ \text{は偶数}) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & (n\ \text{は奇数}), \\ -2\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\pi & (n\ \text{は偶数}) \end{cases}
\end{aligned}$$

である.

2. (1) 3次元ベクトル場 F を

$$F(x, y, z) = a \times (x,\ y,\ z) \quad ((x,\ y,\ z) \in \mathbf{R}^3)$$

により定める. $a = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ とおくと,

$$F = (a_2 z - a_3 y,\ a_3 x - a_1 z,\ a_1 y - a_2 x)$$

だから,

$$\mathrm{rot}\, F = 2a$$

である. よって, Stokesの定理より,

$$\iint_{p\circ\gamma} a \times (p\circ\gamma)\, \overrightarrow{ds} = 2\int_p a\, \overrightarrow{dA}$$

である.

(2) 問題5-4で述べたことと定理5.1 (1) より,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,(f\, \mathrm{grad}\, g) &= \mathrm{grad}\, f \times \mathrm{grad}\, g + f\, \mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, g) \\
&= \mathrm{grad}\, f \times \mathrm{grad}\, g
\end{aligned}$$

である. よって, Stokes の定理より,

$$\int_{p\circ\gamma} f \operatorname{grad} g \, \overrightarrow{ds} = \iint_p \operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g \, \overrightarrow{dA}$$

である.

(3) Stokes の定理より,

$$\begin{aligned}\int_{p\circ\gamma} E \, \overrightarrow{ds} &= \iint_p \operatorname{rot} E \, \overrightarrow{dA} \\ &= -\iint_p \frac{\partial B}{\partial t} \, \overrightarrow{dA} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \iint_p B \, \overrightarrow{dA}\end{aligned}$$

である.