

§2. ベクトル値関数

微分積分では実数値関数, すなわち, \mathbf{R} に値をとる関数を主に扱った. 簡単のため, 以下では区間を定義域とする1変数の関数を考えることにしよう. すると, \mathbf{R} に値をとる関数とは区間から \mathbf{R} への写像のことである. ここでは, n を2以上の自然数とし, 区間から \mathbf{R}^n への写像, すなわち, ベクトル値関数を考える. なお, ベクトル値関数と対比させて, \mathbf{R} に値をとる関数をスカラー値関数ともいう.

まず, I を区間とし, f を I で定義された \mathbf{R}^n に値をとるベクトル値関数とする. このとき, f は I で定義された n 個の関数 f_1, f_2, \dots, f_n を用いて

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) \quad (t \in I) \quad (*)$$

と表すことができる.

次に, g も I で定義された \mathbf{R}^n に値をとるベクトル値関数とし,

$$g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく. \mathbf{R}^n はベクトル空間であるから, I で定義された \mathbf{R}^n に値をとるベクトル値関数 $f + g$ を

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) = (f_1(t) + g_1(t), f_2(t) + g_2(t), \dots, f_n(t) + g_n(t)) \quad (t \in I)$$

により定めることができる. また, c を I で定義されたスカラー値関数とすると, \mathbf{R}^n に値をとるベクトル値関数 cf を

$$(cf)(t) = c(t)f(t) = (c(t)f_1(t), c(t)f_2(t), \dots, c(t)f_n(t)) \quad (t \in I)$$

により定めることができる.

更に, \mathbf{R}^n の標準内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を考える. このとき, I で定義されたスカラー値関数 $\langle f, g \rangle$ を

$$\langle f, g \rangle(t) = \langle f(t), g(t) \rangle = f(t)^t g(t) \quad (t \in I)$$

により定めることができる. また, \mathbf{R}^n の標準内積から定まるノルム $\| \cdot \|$ を用いて, I で定義されたスカラー値関数 $\|f\|$ を

$$\|f\|(t) = \|f(t)\| = \sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle} \quad (t \in I)$$

により定めることができる.

\mathbf{R}^3 に値をとるベクトル値関数に対しては外積を考えることもできる. f, g を区間 I で定義された \mathbf{R}^3 に値をとるベクトル値関数とする. このとき, I で定義された \mathbf{R}^3 に値をとるベクトル値関数 $f \times g$ を

$$(f \times g)(t) = f(t) \times g(t) \quad (t \in I)$$

により定めることができる.

再び, f を区間 I で定義された \mathbf{R}^n に値をとるベクトル値関数としよう. f が (*) のように表されているとき, 各 f_1, f_2, \dots, f_n が I で微分可能ならば, f は I で微分可能であるという. このとき, I で定義された \mathbf{R}^n に値をとるベクトル値関数 f' を

$$f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t)) \quad (t \in I)$$

により定め、 f' を f の微分という。すなわち、ベクトル値関数の微分は成分毎に考えればよい。ベクトル値関数の微分に関して、次がなりたつ。

定理 2.1 f, g を区間 I で微分可能な \mathbf{R}^n に値をとるベクトル値関数とすると、次の (1)~(4) がなりたつ。

- (1) $(f + g)' = f' + g'$.
- (2) c を I で微分可能なスカラー値関数とすると、 $(cf)' = c'f + cf'$.
- (3) $\langle f, g \rangle' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$.
- (4) $n = 3$ のとき、 $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.

証明 (1): 成分毎に考え、微分の線形性を用いればよい。

(2): 成分毎に考え、積の微分法を用いればよい。

(3): f, g をそれぞれ

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)), \quad g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく、

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle'(t) &= \langle f(t), g(t) \rangle' \\ &= (f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + \dots + f_n(t)g_n(t))' \\ &= (f_1(t)g_1(t))' + (f_2(t)g_2(t))' + \dots + (f_n(t)g_n(t))' \\ &= (f_1'(t)g_1(t) + f_1(t)g_1'(t)) + (f_2'(t)g_2(t) + f_2(t)g_2'(t)) + \dots + (f_n'(t)g_n(t) + f_n(t)g_n'(t)) \\ &= f_1'(t)g_1(t) + f_2'(t)g_2(t) + \dots + f_n'(t)g_n(t) + f_1(t)g_1'(t) + f_2(t)g_2'(t) + \dots + f_n(t)g_n'(t) \\ &= \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle \\ &= \langle f', g \rangle(t) + \langle f, g' \rangle(t) \\ &= (\langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle)(t) \end{aligned}$$

である。よって、(3) がなりたつ。

(4): f, g をそれぞれ

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), \quad g(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておき、

$$(f \times g)(t) = (h_1(t), h_2(t), h_3(t)) \quad (t \in I)$$

とおく。このとき、外積の定義より、

$$h_1(t) = f_2(t)g_3(t) - f_3(t)g_2(t), \quad h_2(t) = f_3(t)g_1(t) - f_1(t)g_3(t), \quad h_3(t) = f_1(t)g_2(t) - f_2(t)g_1(t)$$

である。よって、

$$\begin{aligned} h_1'(t) &= (f_2'(t)g_3(t) + f_2(t)g_3'(t)) - (f_3'(t)g_2(t) + f_3(t)g_2'(t)) \\ &= (f_2'(t)g_3(t) - f_3'(t)g_2(t)) + (f_2(t)g_3'(t) - f_3(t)g_2'(t)) \end{aligned}$$

である。同様に、

$$\begin{aligned} h_2'(t) &= (f_3'(t)g_1(t) - f_1'(t)g_3(t)) + (f_3(t)g_1'(t) - f_1(t)g_3'(t)), \\ h_3'(t) &= (f_1'(t)g_2(t) - f_2'(t)g_1(t)) + (f_1(t)g_2'(t) - f_2(t)g_1'(t)) \end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned}(f \times g)'(t) &= (f'_2(t)g_3(t) - f'_3(t)g_2(t), f'_3(t)g_1(t) - f'_1(t)g_3(t), f'_1(t)g_2(t) - f'_2(t)g_1(t)) \\ &\quad + (f_2(t)g'_3(t) - f_3(t)g'_2(t), f_3(t)g'_1(t) - f_1(t)g'_3(t), f_1(t)g'_2(t) - f_2(t)g'_1(t)) \\ &= (f' \times g)(t) + (f \times g')(t)\end{aligned}$$

である. したがって, (4) がなりたつ. □

ベクトル値関数の積分についても考えよう. f を閉区間 $[a, b]$ で定義された \mathbf{R}^n に値をとるベクトル値関数とし,

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) \quad (t \in [a, b])$$

と表しておく. 各 f_1, f_2, \dots, f_n が $[a, b]$ で積分可能なとき, $\int_a^b f(t) dt \in \mathbf{R}^n$ を

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \int_a^b f_2(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right)$$

により定め, これを f の $[a, b]$ における定積分という. このとき, f は $[a, b]$ で積分可能であるという. スカラー値関数の定積分の場合と同様に, ベクトル値関数の定積分は線形性をもつ. すなわち, 次がなりたつ.

定理 2.2 f, g を閉区間 $[a, b]$ で積分可能な \mathbf{R}^n に値をとるベクトル値関数とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.

$$(1) \int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$$

$$(2) c \in \mathbf{R} \text{ とすると, } \int_a^b (cf)(t) dt = c \int_a^b f(t) dt.$$

証明 f, g をそれぞれ

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)), \quad g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)) \quad (t \in I)$$

と表し, 成分毎に計算すればよい. □

f を閉区間 $[a, b]$ で積分可能な \mathbf{R}^n に値をとるベクトル値関数とする. このとき, $[a, b]$ で定義された \mathbf{R}^n に値をとるベクトル値関数 F を

$$F(t) = \int_a^t f(s) ds \quad (t \in [a, b])$$

により定める. これを f の不定積分という. 微分積分学の基本定理より,

$$F'(t) = f(t) \quad (t \in [a, b])$$

がなりたち, 更に,

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

がなりたつ.

問題 2

1. \mathbf{R} で定義された \mathbf{R}^2 に値をとるベクトル値関数 f, g をそれぞれ

$$f(t) = (t, t^2), \quad g(t) = (t^3, t^4) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める.

(1) $\langle f, g' \rangle$ を求めよ.

(2) $\int_0^1 \|f\|(t) dt$ を求めよ.

(3) $\int_0^1 (f + g)(t) dt$ を求めよ.

2. \mathbf{R} で定義された \mathbf{R}^3 に値をとるベクトル値関数 f を

$$f(t) = (t, t^2, t^3) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める.

(1) $f \times f'$ を求めよ.

(2) $\langle f \times f', f'' \rangle$ を求めよ.

3. f を開区間 I で定義された微分可能なベクトル値関数とする. ある $t_0 \in I$ が存在し, I で定義されたスカラー値関数 $\|f\|$ が $t = t_0$ で最大または最小となるならば, $f(t_0)$ と $f'(t_0)$ は直交することを示せ.

4. f を区間 I で定義された微分可能なベクトル値関数とする. $\|f\|$ が定数関数となるための必要十分条件は, 任意の $t \in I$ に対して, $f(t)$ と $f'(t)$ が直交することであることを示せ.

5. f を区間 I で定義された 2 回微分可能な \mathbf{R}^3 に値をとるベクトル値関数とする. I で定義されたスカラー値関数 c が存在し, 任意の $t \in I$ に対して,

$$f''(t) = c(t)f(t)$$

がなりたつならば, $f \times f'$ は定ベクトル, すなわち, t に依存しないベクトルであることを示せ.

問題 2 の解答

1. (1) まず,

$$g'(t) = (3t^2, 4t^3)$$

である. よって,

$$\begin{aligned} \langle f, g' \rangle(t) &= \langle f(t), g'(t) \rangle \\ &= \langle (t, t^2), (3t^2, 4t^3) \rangle \\ &= t \cdot 3t^2 + t^2 \cdot 4t^3 \\ &= 3t^3 + 4t^5 \end{aligned}$$

である.

(2) $t \in [0, 1]$ のとき,

$$\begin{aligned} \|f\|(t) &= \sqrt{t^2 + (t^2)^2} \\ &= t\sqrt{1+t^2} \end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|f\|(t) dt &= \int_0^1 t\sqrt{1+t^2} dt \\ &= \left[\frac{1}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \end{aligned}$$

である.

(3) 直接計算すると,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f+g)(t) dt &= \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 g(t) dt \\ &= \left(\int_0^1 t dt, \int_0^1 t^2 dt \right) + \left(\int_0^1 t^3 dt, \int_0^1 t^4 dt \right) \\ &= \left(\left[\frac{1}{2}t^2 \right]_0^1, \left[\frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 \right) + \left(\left[\frac{1}{4}t^4 \right]_0^1, \left[\frac{1}{5}t^5 \right]_0^1 \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5} \right) \\ &= \left(\frac{3}{4}, \frac{8}{15} \right) \end{aligned}$$

である.

2. (1) まず,

$$f'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

である. よって,

$$\begin{aligned} (f \times f')(t) &= (t, t^2, t^3) \times (1, 2t, 3t^2) \\ &= (t^2 \cdot 3t^2 - t^3 \cdot 2t, t^3 \cdot 1 - t \cdot 3t^2, t \cdot 2t - t^2 \cdot 1) \\ &= (t^4, -2t^3, t^2) \end{aligned}$$

である.

(2) (1) の計算より,

$$\begin{aligned} f''(t) &= (1', (2t)', (3t^2)') \\ &= (0, 2, 6t) \end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned} \langle f \times f', f'' \rangle(t) &= \langle (t^4, -2t^3, t^2), (0, 2, 6t) \rangle \\ &= t^4 \cdot 0 + (-2t^3) \cdot 2 + t^2 \cdot 6t \\ &= 2t^3 \end{aligned}$$

である.

3. まず,

$$\begin{aligned} (\|f\|^2)' &= \langle f, f \rangle' \\ &= \langle f', f \rangle + \langle f, f' \rangle \\ &= 2\langle f, f' \rangle \end{aligned}$$

である. 仮定より, $\|f\|^2$ は $t = t_0$ で最大または最小となるから,

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} \|f\|^2 \right|_{t=t_0} \\ &= 2\langle f(t_0), f'(t_0) \rangle \end{aligned}$$

である. よって,

$$\langle f(t_0), f'(t_0) \rangle = 0,$$

すなわち, $f(t_0)$ と $f'(t_0)$ は直交する.

4. まず, $\|f\|$ が定数関数であると仮定する. このとき, $\|f\|^2$ も定数関数だから,

$$\begin{aligned} 0 &= (\|f\|^2)' \\ &= 2\langle f, f' \rangle \end{aligned}$$

である. よって, 任意の $t \in I$ に対して,

$$\langle f(t), f'(t) \rangle = 0,$$

すなわち, $f(t)$ と $f'(t)$ は直交する.

上の計算は逆に辿ることもできるから, 任意の $t \in I$ に対して, $f(t)$ と $f'(t)$ が直交すると仮定すると, $\|f\|$ は定数関数である.

5. 仮定より,

$$\begin{aligned} (f \times f')' &= f' \times f' + f \times f'' \\ &= 0 + f \times (cf) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である. よって, $f \times f'$ の各成分は定数となるから, $f \times f'$ は定ベクトルである.