

## §8. 曲面の面積

§4で述べたように、閉区間  $[a, b]$  で  $C^1$  級のスカラー値関数  $f$  のグラフとして表される曲線の長さは定積分

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

によりあたえられる。これは曲線上に分点を取ることによって曲線を折れ線で近似し、更に分点を増やして折れ線の長さの和の極限を考えることによって得られるのであった。

上の考え方を2変数のスカラー値関数のグラフとして表される曲面に適用したらどうであろうか。実は、曲面を内接する多角形で近似すると、面積の和の極限が存在しない場合があることが Schwarz の提灯という例によって知られている。詳しい説明は省略するが、曲面の面積は外接するような多面体で考えると上手くいくのである。  $D$  を  $\mathbf{R}^2$  の面積確定な部分集合、  $f$  を  $D$  で  $C^1$  級のスカラー値関数とする。このとき、  $f$  のグラフの面積は重積分

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

によりあたえられる。

以下では、広義の重積分が現れることがあるが、気にしないで形式的に計算を行うことにする。

**例 8.1**  $a > 0$  とし、原点中心、半径  $a$  の球面

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

の面積を求めよう。

この球面の  $z \geq 0$  の部分は

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

とおくと、

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad ((x, y) \in D)$$

により定められるスカラー値関数  $f$  のグラフである。ここで、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

だから、

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 &= 1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2} \\ &= \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2} \end{aligned}$$

である。また、極座標変換を用いると、  $D$  は領域

$$E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

へ写される。よって、求める面積は  $z \geq 0$  の部分の面積を2倍して、

$$\begin{aligned}
2 \iint_D \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy &= 2a \iint_E \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta \\
&= 2a \int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 2a \left[ -\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^a \cdot 2\pi \\
&= 4\pi a^2
\end{aligned}$$

である.

回転体という曲面の面積は次のように 1 変数関数の定積分に帰着される.

**定理 8.1**  $f$  を閉区間  $[a, b]$  で  $C^1$  級の非負のスカラ値関数とする.  $xy$  平面上の  $f$  のグラフを  $xyz$  空間の中で  $x$  軸の周りに回転して得られる曲面の面積は

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

によりあたえられる.

**証明** あたえられた曲面は

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid a \leq x \leq b, y^2 + z^2 = (f(x))^2\}$$

と表される.  $z \geq 0$  の部分を考えて,

$$z = \sqrt{(f(x))^2 - y^2} \quad ((x, y) \in D)$$

である. ただし,

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, -f(x) \leq y \leq f(x)\}$$

である. このとき,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{(f(x))^2 - y^2}}$$

だから,

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = (f(x))^2 \frac{1 + (f'(x))^2}{(f(x))^2 - y^2}$$

である. よって, あたえられた曲面の面積は  $z \geq 0$  の部分の面積を 2 倍して,

$$\begin{aligned}
2 \iint_D f(x) \sqrt{\frac{1 + (f'(x))^2}{(f(x))^2 - y^2}} dx dy &= 2 \int_a^b dx \int_{-f(x)}^{f(x)} f(x) \sqrt{\frac{1 + (f'(x))^2}{(f(x))^2 - y^2}} dy \\
&= 2 \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \left[ \sin^{-1} \frac{y}{f(x)} \right]_{y=-f(x)}^{y=f(x)} dx \\
&= 2 \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\} dx \\
&= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx
\end{aligned}$$

である. □

**例 8.2**  $a > 0$  とすると, 原点中心, 半径  $a$  の球面は

$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \leq x \leq a)$$

により定められるスカラー値関数  $f$  のグラフを  $xyz$  空間の中で  $x$  軸の周りに回転して得られる. ここで,

$$\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

だから, この球面の面積は

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx &= 2\pi \int_{-a}^a a dx \\ &= 2\pi a \cdot 2a \\ &= 4\pi a^2 \end{aligned}$$

である.

$\mathbf{R}^2$  の面積確定な部分集合  $D$  が極座標変換を用いて集合  $E$  へ写されるとし,  $f$  を  $D$  で  $C^1$  級のスカラー値関数とする. ここで,  $z = f(x, y)$  と極座標変換の合成を考えると,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

がなりたつことに注意しよう. このことを用いると, 変数変換公式より,  $f$  のグラフの面積は

$$\iint_E \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} r dr d\theta$$

によりあたえられる.

**例 8.3**  $a > 0$  とし,  $D$  を

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

により定められる領域とする. 極座標変換を用いると,  $D$  は領域

$$E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

へ写される. よって, 楕円放物面の一部

$$\{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, z = x^2 + y^2\},$$

すなわち,

$$\{(r, \theta, z) \mid (r, \theta) \in E, z = r^2\}$$

の面積は

$$\begin{aligned} \iint_E \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta &= \int_0^a r \sqrt{1 + 4r^2} dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \left[ \frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a \cdot 2\pi \\ &= \frac{\pi}{6} \{(1 + 4a^2)^{\frac{3}{2}} - 1\} \end{aligned}$$

である.

## 問題 8

- 1.
- $0 < a < b$
- とする. 円

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + (y - b)^2 = a^2\}$$

を  $xyz$  空間の中で  $x$  軸の周りに回転して得られる曲面の面積を求めよ. なお, この曲面を輪環面, 円環面またはトーラスという.

- 2.
- $a > 0$
- とする. アステロイド

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\}$$

を  $xyz$  空間の中で  $x$  軸の周りに回転して得られる曲面の面積を求めよ.

- 3.
- $a > 0$
- に対して

$$f(x) = a \cosh \frac{x}{a} \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定められるスカラー値関数  $f$  のグラフを懸垂線またはカテナリーという. また,  $xyz$  空間の中でカテナリーを  $x$  軸の周りに回転して得られる曲面を懸垂面またはカテノイドという.

カテナリーの一部

$$\{(x, f(x)) \mid 0 \leq x \leq b\}$$

を  $x$  軸の周りに回転して得られるカテノイドの一部の面積を求めよ.

- 4.
- $a > 0$
- に対して

$$\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定められるサイクロイド

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$$

を考える.  $xyz$  空間の中で  $0 \leq t \leq \pi$  の範囲で  $\gamma$  を  $x$  軸の周りに回転して得られる曲面の面積を求めよ.

- 5.
- $a > 0$
- とし,
- $D$
- を

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq ax\}$$

により定められる領域とする. このとき,

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad ((x, y) \in D)$$

により定められるスカラー値関数  $f$  のグラフの面積を求めよ.

## 問題8の解答

1. トーラスは2つの半円

$$\{(x, y) \mid -a \leq x \leq a, y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}\}$$

を回転して得られることに注意する.  $(x, y)$  を半円上の点とすると,

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (\text{複号同順})$$

だから, 求める面積は

$$\begin{aligned} & 2\pi \int_{-a}^a (b + \sqrt{a^2 - x^2}) \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx + 2\pi \int_{-a}^a (b - \sqrt{a^2 - x^2}) \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx \\ &= 4\pi ab \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &= 4\pi ab \left[ \sin^{-1} \frac{x}{a} \right]_{-a}^a \\ &= 4\pi ab \left\{ \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right\} \\ &= 4\pi^2 ab \end{aligned}$$

である.

2.  $0 \leq x \leq a$  に対して

$$f(x) = \left( a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

とおくと,

$$f'(x) = -x^{-\frac{1}{3}} \left( a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

である. 求める面積は  $0 \leq x \leq a$  の部分の面積を2倍して,

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2\pi \int_0^a f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx &= 4\pi \int_0^a \left( a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + x^{-\frac{2}{3}} \left( a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)} dx \\ &= 4\pi a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{-\frac{1}{3}} \left( a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= 4\pi a^{\frac{1}{3}} \left[ -\frac{3}{5} \left( a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{5}{2}} \right]_0^a \\ &= 4\pi a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{5} a^{\frac{5}{3}} \\ &= \frac{12}{5} \pi a^2 \end{aligned}$$

である.

3. 求める面積は

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx &= 2\pi \int_0^b a \cosh \frac{x}{a} \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{a}} dx \\ &= 2\pi a \int_0^b \cosh^2 \frac{x}{a} dx \\ &= 2\pi a \int_0^b \frac{1 + \cosh \frac{2x}{a}}{2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi a \left[ \frac{1}{2}x + \frac{a}{4} \sinh \frac{2x}{a} \right]_0^b \\
&= \frac{\pi a}{2} \left( 2b + a \sinh \frac{2b}{a} \right)
\end{aligned}$$

である.

4.  $\gamma = (x, y)$  とおくと, 求める面積は

$$\begin{aligned}
2\pi \int_0^{\pi a} y \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} dx &= 2\pi \int_0^\pi y \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} \frac{dx}{dt} dt \\
&= 2\pi \int_0^\pi a(1 - \cos t) \sqrt{1 + \left\{ \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} \right\}^2} a(1 - \cos t) dt \\
&= 2\pi a^2 \int_0^\pi (1 - \cos t) \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt \\
&= 2\pi a^2 \int_0^\pi (1 - \cos t) \sqrt{2(1 - \cos t)} dt \\
&= 2\pi a^2 \int_0^\pi 2 \sin^2 \frac{t}{2} \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\
&= 8\pi a^2 \int_0^\pi \sin^3 \frac{t}{2} dt \\
&= 16\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta \quad (t = 2\theta) \\
&= 16\pi a^2 \cdot \frac{2}{3} \\
&= \frac{32}{3} \pi a^2
\end{aligned}$$

である.

5. 極座標変換を用いると,  $y \geq 0$  となる  $D$  の部分は領域

$$E = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

へ写される. よって, 求める面積は曲面

$$\{(r, \theta, z) \mid (r, \theta) \in E, z = \sqrt{a^2 - r^2}\}$$

の面積を2倍して,

$$\begin{aligned}
2 \iint_E \sqrt{1 + \left( \frac{-r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right)^2} r dr d\theta &= 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \\
&= 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\sqrt{a^2 - r^2} \right]_{r=0}^{r=a \cos \theta} d\theta \\
&= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin \theta + 1) d\theta \\
&= 2a^2 \left( -1 + \frac{\pi}{2} \right) \\
&= a^2(\pi - 2)
\end{aligned}$$

である.