

ベクトル場

2026年度「M 微分幾何学」(藤岡敦担当)
オンデマンド配信授業

内容

ベクトル場

内容

接ベクトルと
接空間

ベクトル場の
定義と演算

方向微分による
方法

関数の微分と
括弧積

まとめ

- ① 接ベクトルと接空間
- ② ベクトル場の定義と演算
- ③ 方向微分による方法
- ④ 関数の微分と括弧積
- ⑤ まとめ

曲線の微分としての接ベクトルと接空間

ベクトル場

$D \subset \mathbb{R}^n$: 開集合, $D \neq \emptyset$

$\mathbf{p} \in D$

I : 有界開区間

$t_0 \in I$

$\gamma: I \rightarrow D$: C^1 級曲線 s.t. $\gamma(t_0) = \mathbf{p}$

γ の $t = t_0$ における**接ベクトル** $\gamma'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ が得られる

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく

$$\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0), \dots, \gamma'_n(t_0))$$

ただし

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$T_{\mathbf{p}}D$: 接ベクトル全体

$\mathbf{p}$ における**接空間**という

内容

接ベクトルと
接空間

ベクトル場の
定義と演算

方向微分によ
る方法

関数の微分と
括弧積

まとめ

接空間はベクトル空間

ベクトル場

内容

接ベクトルと
接空間

ベクトル場の
定義と演算

方向微分による
方法

関数の微分と
括弧積

まとめ

命題

$$T_p D = \mathbb{R}^n$$

とくに $T_p D$ はベクトル空間となる

証明

$T_p D \subset \mathbb{R}^n$: $T_p D$ の定義より明らか

$$\mathbb{R}^n \subset T_p D: \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

$\gamma(0) = \mathbf{p}$ となる曲線 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow D$ を

$$\gamma(t) = t\mathbf{v} + \mathbf{p} \quad (t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$$

により定めることができる

ただし $\varepsilon > 0$ は十分小さい正の数

このとき

$$\mathbf{v} = \gamma'(0) \in T_p D$$



ベクトル場の定義と滑らかさ

ベクトル場

各 $\boldsymbol{p} \in D$ に対して $X_{\boldsymbol{p}} \in T_{\boldsymbol{p}}D$ があたえられているとする
この対応を X と表す

D 上のベクトル場という

$T_{\boldsymbol{p}}D = \mathbb{R}^n$ に注意し

$$X_{\boldsymbol{p}} = (\xi_1(\boldsymbol{p}), \xi_2(\boldsymbol{p}), \dots, \xi_n(\boldsymbol{p}))$$

と表しておく

$$X = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ は D 上の関数を定める

定義

$X: C^\infty$ 級

$\Updownarrow$ def.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n: C^\infty$ 級

内容

接ベクトルと
接空間

ベクトル場の
定義と演算

方向微分による
方法

関数の微分と
括弧積

まとめ

ベクトル場の演算 (その1)

ベクトル場

内容

接ベクトルと
接空間

ベクトル場の
定義と演算

方向微分による
方法

関数の微分と
括弧積

まとめ

$\mathfrak{X}(D)$: D 上の C^∞ 級ベクトル場全体

各 $\boldsymbol{p} \in D$ に対して $T_{\boldsymbol{p}}D$ の零ベクトルを対応させる
 C^∞ 級ベクトル場が得られる

$\mathbf{0}$ と表す

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$$

ただし $\mathbf{0}$ は常に 0 の値をとる定数関数

$X \in \mathfrak{X}(D)$ とする

各 $\boldsymbol{p} \in D$ に対して $-X_{\boldsymbol{p}}$ を対応させる

C^∞ 級ベクトル場が得られる

$-X$ と表す

$$X = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

とすると

$$-X = (-\xi_1, -\xi_2, \dots, -\xi_n)$$

ベクトル場の演算 (その2)

ベクトル場

$X, Y \in \mathfrak{X}(D)$ とする

$$(X + Y)_p := X_p + Y_p \quad (p \in D)$$

$X + Y \in \mathfrak{X}(D)$ を定める

$$X = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad Y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$$

とすると

$$X + Y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n)$$

$C^\infty(D)$: D 上の C^∞ 級関数全体

$X \in \mathfrak{X}(D), f \in C^\infty(D)$ とする

$$(fX)_p := f(p)X_p \quad (p \in D)$$

$fX \in \mathfrak{X}(D)$ を定める

内容

接ベクトルと
接空間

ベクトル場の
定義と演算

方向微分によ
る方法

関数の微分と
括弧積

まとめ



ベクトル場の演算に関する基本的性質（その1）

ベクトル場

内容

接ベクトルと
接空間

ベクトル場の
定義と演算

方向微分による
方法

関数の微分と
括弧積

まとめ

命題

$$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(D)$$

$$f, g \in C^\infty(D)$$

$\Rightarrow$ 次の (1)~(7) がなりたつ

(1) $X + Y = Y + X$ (和の交換律)

(2) $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ (和の結合法律)

(3) $X + \mathbf{0} = X$

(4) $X + (-X) = \mathbf{0}$

(5) $(fg)X = f(gX)$ (関数倍の結合法律)

(6) $(f + g)X = fX + gX, f(X + Y) = fX + fY$ (分配律)

(7) $1X = X$

ただし 1 は常に 1 の値をとる定数関数

ベクトル場の演算に関する基本的性質（その2）

ベクトル場

内容

接ベクトルと 接空間

ベクトル場の 定義と演算

方向微分による 方法

関数の微分と 括弧積

まとめ

証明

(1) のみ示す

$$X = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad Y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$$

と表しておく

このとき

$$\begin{aligned} X + Y &= (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n) \\ &= (\eta_1 + \xi_1, \eta_2 + \xi_2, \dots, \eta_n + \xi_n) \\ &= Y + X \end{aligned}$$

方向微分

ベクトル場

内容

接ベクトルと
接空間

ベクトル場の
定義と演算

方向微分による
方法

関数の微分と
括弧積

まとめ

I : 有界開区間

$t_0 \in I$

$\gamma: I \rightarrow D$: 曲線 s.t. $\gamma(t_0) = \mathbf{p}$

$U \subset \mathbb{R}^n$: 開集合 s.t. $\gamma(I) \subset U \subset D$

$f \in C^\infty(U)$

$\rightsquigarrow f \circ \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbf{v}_\gamma(f) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (f \circ \gamma) \in \mathbb{R}$$

f から $\mathbf{v}_\gamma(f)$ への対応を**方向微分**という

$\mathbf{v}_\gamma(f)$ を γ 方向の**微分係数**という



方向微分に関する基本的性質（その1）

ベクトル場

内容

接ベクトルと
接空間

ベクトル場の
定義と演算

方向微分によ
る方法

関数の微分と
括弧積

まとめ

定理

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$f, g \in C^\infty(U)$$

$\implies$ 次の (1), (2) がなりたつ

$$(1) \mathbf{v}_\gamma(af + bg) = a\mathbf{v}_\gamma(f) + b\mathbf{v}_\gamma(g)$$

$$(2) \mathbf{v}_\gamma(fg) = \mathbf{v}_\gamma(f)g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\mathbf{v}_\gamma(g)$$

証明

(1): 微分の線形性を用いる

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_\gamma(af + bg) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} ((af + bg) \circ \gamma) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (a(f \circ \gamma) + b(g \circ \gamma))\end{aligned}$$

方向微分に関する基本的性質（その2）

ベクトル場

内容

接ベクトルと
接空間

ベクトル場の
定義と演算

方向微分による
方法

関数の微分と
括弧積

まとめ

証明（続き）

$$\begin{aligned} &= a \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (f \circ \gamma) + b \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (g \circ \gamma) \\ &= a \mathbf{v}_\gamma(f) + b \mathbf{v}_\gamma(g) \end{aligned}$$

(2): 積の微分法を用いる

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\gamma(fg) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} ((fg) \circ \gamma) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} ((f \circ \gamma)(g \circ \gamma)) \\ &= \dots \end{aligned}$$



方向微分としての接ベクトル

ベクトル場

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく

$$\mathbf{v}_\gamma(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) \gamma'_i(t_0)$$

方向微分を

$$\mathbf{v}_\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma'_i(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{p}}$$

と表す

接ベクトル

$$\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0), \dots, \gamma'_n(t_0))$$

を $\mathbf{v}_\gamma$ とみなす

内容

接ベクトルと
接空間

ベクトル場の
定義と演算

方向微分による
方法

関数の微分と
括弧積

まとめ



方向微分による接空間とベクトル場のなす空間

ベクトル場

内容

接ベクトルと
接空間

ベクトル場の
定義と演算

方向微分によ
る方法

関数の微分と
括弧積

まとめ

このとき

$$T_{\mathbf{p}}D = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \bigg|_{\mathbf{p}} \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

また

$$\mathfrak{X}(D) = \left\{ \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \bigg| \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in C^\infty(D) \right\}$$



ベクトル場による関数の微分

ベクトル場

$$X \in \mathfrak{X}(D)$$

$$f \in C^\infty(D)$$

$$(Xf)(\boldsymbol{p}) := X_{\boldsymbol{p}}(f) \quad (\boldsymbol{p} \in D)$$

$Xf \in C^\infty(D)$ を定める

内容

接ベクトルと
接空間

ベクトル場の
定義と演算

方向微分による
方法

関数の微分と
括弧積

まとめ

定理

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$f, g \in C^\infty(D)$$

$\implies$ 次の (1), (2) がなりたつ

$$(1) X(af + bg) = aXf + bXg$$

$$(2) X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$$

証明

方向微分に関する基本的性質より明らか

括弧積（その1）

ベクトル場

$$X, Y \in \mathfrak{X}(D)$$

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \in C^\infty(D))$$

と表しておく
このとき

$$\begin{aligned} X(Yf) &= X \left(\sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n X \left(\eta_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

内容

接ベクトルと
接空間

ベクトル場の
定義と演算

方向微分による
方法

関数の微分と
括弧積

まとめ



括弧積（その2）

ベクトル場

内容

接ベクトルと 接空間

ベクトル場の 定義と演算

方向微分による 方法

関数の微分と 括弧積

まとめ

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \xi_i \eta_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \xi_i \eta_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \end{aligned}$$

同様に

$$Y(Xf) = \sum_{i,j=1}^n \left(\eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \xi_i \eta_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$



括弧積 (その3)

ベクトル場

よって

$$X(Yf) - Y(Xf) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

ここで

$$[X, Y]f := (XY - YX)f := X(Yf) - Y(Xf)$$

$[X, Y] \in \mathfrak{X}(D)$ とみなすことができる

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$[X, Y]$ を X と Y の括弧積という

内容

接ベクトルと
接空間

ベクトル場の
定義と演算

方向微分による
方法

関数の微分と
括弧積

まとめ



括弧積に関する基本的性質

ベクトル場

内容

接ベクトルと 接空間

ベクトル場の 定義と演算

方向微分による 方法

関数の微分と 括弧積

まとめ

定理

$$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(D)$$

$$f, g \in C^\infty(D)$$

$\Rightarrow$ 次の (1)~(4) がなりたつ

$$(1) [X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z], [X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$$

$$(2) [X, Y] = -[Y, X] \text{ (交代性)}$$

$$(3) [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \text{ (ヤコビの恒等式)}$$

$$(4) [fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

証明

(1): 微分の線形性より明らか

(2): 括弧積の定義より明らか



まとめ

ベクトル場

内容

接ベクトルと接空間

ベクトル場の定義と演算

方向微分による方法

関数の微分と括弧積

まとめ

- 曲線の微分を用いてユークリッド空間の開集合上の接ベクトルを定めることができる
- 接ベクトル全体の集合はベクトル空間となる (接空間)
- ベクトル場: 開集合の各点で接ベクトルを対応させる
- ベクトル場に対して滑らかさ, 和や関数倍を定めることができる
- 方向微分を用いて接ベクトルを定めることができる
- ベクトル場による関数の微分や括弧積を定めることができる

