

演習

2026年度「幾何学2」(藤岡敦担当)
オンデマンド配信授業

内容

演習

内容

立体射影

北極が中心の
場合

一般次元の
場合

① 立体射影

② 北極が中心の場合

③ 一般次元の場合



立体射影の定義（その1）

演習

単位球面:

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$p \in S^2$: 固定

Π : 原点 0 を通り p と直交する平面

$x \in S^2 \setminus \{p\}$

y : p, x を通る直線と Π の交点

x から y への対応

$$p : S^2 \setminus \{p\} \rightarrow \Pi$$

を p を中心とする立体射影という

p は全単射

逆写像は

$$p^{-1} : \Pi \rightarrow S^2 \setminus \{p\}$$

内容

立体射影

北極が中心の
場合

一般次元の
場合



第1問

演習

内容

立体射影

北極が中心の
場合

一般次元の
場合

問題 (教科書「例題 6.1」)

$$\mathbf{p} \in S^2$$

$p : S^2 \setminus \{\mathbf{p}\} \rightarrow \Pi$: $\mathbf{p}$ を中心とする立体射影

(1) $\mathbf{x} \in S^2 \setminus \{\mathbf{p}\}$

$p(\mathbf{x})$ を $\mathbf{p}, \mathbf{x}$ の式で表せ

(2) $\mathbf{y} \in \Pi$

$p^{-1}(\mathbf{y})$ を $\mathbf{p}, \mathbf{y}$ の式で表せ

(1) の解

まず

$$\|\mathbf{p}\| = 1$$

$$\mathbf{y} := p(\mathbf{x})$$

$\mathbf{p} \perp \mathbf{y}$ だから

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

第1問 (続き)

演習

内容

立体射影

北極が中心の
場合

一般次元の
場合

(1) の解 (続き)

また $\exists t \in \mathbb{R}$ s.t.

$$\mathbf{y} = \mathbf{p} + t(\mathbf{x} - \mathbf{p})$$

よって

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} + t(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \rangle \\ &= \|\mathbf{p}\|^2 + t(\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle - \|\mathbf{p}\|^2) \\ &= 1 + t(\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle - 1) \end{aligned}$$

だから

$$t = \frac{1}{1 - \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle}$$



第1問 (続き)

演習

内容

立体射影

北極が中心の
場合

一般次元の
場合

(1) の解 (続き)

したがって

$$\begin{aligned} p(x) &= p + \frac{1}{1 - \langle p, x \rangle} (x - p) \\ &= \frac{x - \langle p, x \rangle p}{1 - \langle p, x \rangle} \end{aligned}$$

(2) の解

まず

$$\|x\| = 1$$

また $\exists s \in \mathbb{R}$ s.t.

$$x = p + s(y - p)$$



第1問 (続き)

演習

内容

立体射影

北極が中心の
場合

一般次元の
場合

(2) の解 (続き)

よって

$$\begin{aligned} 1 &= \|\mathbf{x}\|^2 \\ &= \langle \mathbf{p} + s(\mathbf{y} - \mathbf{p}), \mathbf{p} + s(\mathbf{y} - \mathbf{p}) \rangle \\ &= 1 - 2s + s^2(\|\mathbf{y}\|^2 + 1) \end{aligned}$$

$s \neq 0$ だから

$$s = \frac{2}{\|\mathbf{y}\|^2 + 1}$$

したがって

$$p^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{p} + \frac{2}{\|\mathbf{y}\|^2 + 1}(\mathbf{y} - \mathbf{p})$$



北極を中心とする立体射影（その 1）

演習

内容

立体射影

北極が中心の場合

一般次元の場合

$$\mathbf{p} \in S^2$$

$p : S^2 \setminus \{\mathbf{p}\} \rightarrow \Pi$: $\mathbf{p}$ を中心とする立体射影

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{p}}{1 - \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle} \quad (\mathbf{x} \in S^2 \setminus \{\mathbf{p}\})$$

$$p^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{p} + \frac{2}{\|\mathbf{y}\|^2 + 1}(\mathbf{y} - \mathbf{p}) \quad (\mathbf{y} \in \Pi)$$

$$\mathbf{N} := (0, 0, 1) \in S^2 \text{ (北極)}$$

$p : S^2 \setminus \{\mathbf{N}\} \rightarrow \Pi$: 北極を中心とする立体射影

$$\Pi = \{(X, Y, 0) \mid X, Y \in \mathbb{R}\}$$

$p(\mathbf{x})$, $p^{-1}(\mathbf{y})$ の式において

$$\mathbf{p} = (0, 0, 1), \quad \mathbf{x} = (x, y, z), \quad \mathbf{y} = (X, Y, 0)$$

とおく

北極を中心とする立体射影（その1）（続き）

演習

このとき

$$p(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0 \right)$$

$$p^{-1}(X, Y, 0) = \left(\frac{2X}{X^2 + Y^2 + 1}, \frac{2Y}{X^2 + Y^2 + 1}, \frac{X^2 + Y^2 - 1}{X^2 + Y^2 + 1} \right)$$

全単射

$$f_N : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$$

を定めることができる

$$f_N(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)$$
$$((u, v) \in \mathbb{R}^2)$$

$$f_N^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \quad ((x, y, z) \in S^2 \setminus \{N\})$$

内容

立体射影

北極が中心の
場合

一般次元の
場合

南極を中心とする立体射影

演習

$$S := (0, 0, -1) \in S^2 \text{ (南極)}$$

$p: S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \Pi$: 南極を中心とする立体射影

$$\Pi = \{(X, Y, 0) \mid X, Y \in \mathbb{R}\}$$

全単射

$$f_S: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{S\}$$

を定めることができる

$$f_S(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{1 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2 + 1} \right) \\ ((u, v) \in \mathbb{R}^2)$$

$$f_S^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) \quad ((x, y, z) \in S^2 \setminus \{S\})$$

内容

立体射影

北極が中心の場合

一般次元の場合



第2問

演習

内容

立体射影

北極が中心の
場合

一般次元の
場合

問題 (教科書「例題 6.2」)

$f_N: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$: 北極を中心とする立体射影から得られる
全単射

$f_S: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{S\}$: 南極を中心とする立体射影から得られる
全単射

$$U := f_N(\mathbb{R}^2) \cap f_S(\mathbb{R}^2)$$

(1) U を求めよ

(2) $f_S^{-1}(U)$ を求めよ

(3) $(u, v) \in f_S^{-1}(U)$

$(f_N^{-1} \circ f_S|_{f_S^{-1}(U)})(u, v)$ を u, v の式で表せ

(1) の解

まず

$$f_N(\mathbb{R}^2) = S^2 \setminus \{N\}, \quad f_S(\mathbb{R}^2) = S^2 \setminus \{S\}$$

第2問 (続き)

演習

内容

立体射影

北極が中心の
場合

一般次元の
場合

(1) の解 (続き)

よって

$$f_N(R^2) \cap f_S(R^2) = S^2 \setminus \{N, S\}$$

(2) の解

まず S は f_S^{-1} の定義域の点ではない

また

$$f_S^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) \quad ((x, y, z) \in S^2 \setminus \{S\})$$

だから

$$\begin{aligned} f_S^{-1}(N) &= f_S^{-1}(0, 0, 1) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$



第2問 (続き)

演習

内容

立体射影

北極が中心の
場合

一般次元の
場合

(2) の解 (続き)

更に

$$f_S^{-1}(S^2 \setminus \{S\}) = \mathbb{R}^2$$

よって

$$f_S^{-1}(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

(3) の解

$$\begin{aligned}(f_N^{-1} \circ f_S|_{f_S^{-1}(U)})(u, v) &= \left(\frac{\frac{2u}{u^2+v^2+1}}{1 - \frac{1-u^2-v^2}{u^2+v^2+1}}, \frac{\frac{2v}{u^2+v^2+1}}{1 - \frac{1-u^2-v^2}{u^2+v^2+1}} \right) \\ &= \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2} \right)\end{aligned}$$

立体射影の定義（その2）

演習

$$n \in \mathbb{N}$$

n 次元単位球面:

$$S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

$\mathbf{p} \in S^n$: 固定

Π : 原点 $\mathbf{0}$ を通り $\mathbf{p}$ と直交する超平面

$$\mathbf{x} \in S^n \setminus \{\mathbf{p}\}$$

$\mathbf{y}$: $\mathbf{p}, \mathbf{x}$ を通る直線と Π の交点

$\mathbf{x}$ から $\mathbf{y}$ への対応

$$p : S^n \setminus \{\mathbf{p}\} \rightarrow \Pi$$

を $\mathbf{p}$ を中心とする立体射影という

p は全単射

逆写像は

$$p^{-1} : \Pi \rightarrow S^n \setminus \{\mathbf{p}\}$$

内容

立体射影

北極が中心の
場合

一般次元の
場合



第3問

演習

内容

立体射影

北極が中心の
場合

一般次元の
場合

問題

$$\boldsymbol{p} \in S^n$$

$p : S^n \setminus \{\boldsymbol{p}\} \rightarrow \Pi$: $\boldsymbol{p}$ を中心とする立体射影

(1) $\boldsymbol{x} \in S^n \setminus \{\boldsymbol{p}\}$

$p(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}$ の式で表せ

(2) $\boldsymbol{y} \in \Pi$

$p^{-1}(\boldsymbol{y})$ を $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y}$ の式で表せ

解

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x} - \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{p}}{1 - \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \rangle} \quad (\boldsymbol{x} \in S^n \setminus \{\boldsymbol{p}\})$$

$$p^{-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{p} + \frac{2}{\|\boldsymbol{y}\|^2 + 1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{p}) \quad (\boldsymbol{y} \in \Pi)$$



北極を中心とする立体射影 (その2)

演習

$N := (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ (北極)

$p: S^n \setminus \{N\} \rightarrow \Pi$: 北極を中心とする立体射影

$$\Pi = \{(y_1, \dots, y_n, 0) \mid y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}\}$$

$p(\mathbf{x}), p^{-1}(\mathbf{y})$ の式において

$$\mathbf{p} = (0, \dots, 0, 1), \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n+1}), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n, 0)$$

とおく

このとき

$$p(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}, 0 \right)$$

$$p^{-1}(y_1, \dots, y_n, 0) =$$

$$\left(\frac{2y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \frac{y_1^2 + \dots + y_n^2 - 1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1} \right)$$

内容

立体射影

北極が中心の場合

一般次元の場合

北極を中心とする立体射影（その2）（続き）

演習

内容

立体射影

北極が中心の場合

一般次元の場合

全単射

$$f_N : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{N\}$$

を定めることができる

$(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ とすると

$$f_N(y_1, \dots, y_n) =$$

$$\left(\frac{2y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \frac{y_1^2 + \dots + y_n^2 - 1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1} \right)$$

$(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \setminus \{N\}$ とすると

$$f_N^{-1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$



第4問

演習

内容

立体射影

北極が中心の
場合

一般次元の
場合

問題

$S := (0, \dots, 0, -1)$ (南極)

$\rightsquigarrow p : S^n \setminus \{S\} \rightarrow \Pi$: 南極を中心とする立体射影
全単射

$$f_S : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{S\}$$

および f_S^{-1} を求めよ

解

$(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \setminus \{S\}$ とすると

$$p(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}}, 0 \right)$$

第4問 (続き)

演習

内容

立体射影

北極が中心の
場合

一般次元の
場合

解 (続き)

$(y_1, \dots, y_n, 0) \in \Pi$ とすると

$$p^{-1}(y_1, \dots, y_n, 0) =$$

$$\left(\frac{2y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \frac{1 - y_1^2 - \dots - y_n^2}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1} \right)$$

よって

$$f_S(y_1, \dots, y_n) =$$

$$\left(\frac{2y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \frac{1 - y_1^2 - \dots - y_n^2}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1} \right)$$

$$f_S^{-1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right)$$

第5問

演習

内容

立体射影

北極が中心の
場合

一般次元の
場合

問題

$$U := f_N(\mathbb{R}^n) \cap f_S(\mathbb{R}^n)$$

$$(y_1, \dots, y_n) \in f_S^{-1}(U)$$

$(f_N^{-1} \circ f_S|_{f_S^{-1}(U)})(y_1, \dots, y_n)$ を $y_1, \dots, y_n$ の式で表せ

解

まず

$$U = S^n \setminus \{N, S\}, \quad f_S^{-1}(U) = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$$

さらに

$$\begin{aligned} & (f_N^{-1} \circ f_S|_{f_S^{-1}(U)})(y_1, \dots, y_n) \\ &= \left(\frac{y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2}, \dots, \frac{y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2} \right) \end{aligned}$$