

# 演習

2026年度「幾何学概論1」(藤岡敦担当)  
オンデマンド配信授業

# 内容

演習

内容

第3章

第5章第1節

① 第3章

② 第5章第1節





# ユークリッド空間の等長変換

演習

内容

第3章

第5章第1節

$\mathbb{R}^n$ :  $n$ 次元ユークリッド空間

$d$ :  $\mathbb{R}^n$  のユークリッド距離

## 等長変換の定義

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$f$ : 等長変換

$\Updownarrow$  def.

$f$ : 全単射かつ距離を保つ:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

## 例

恒等変換  $1_{\mathbb{R}^n}$  は等長変換

$\mathbb{R}^n$  の等長変換全体を  $\text{Iso}(\mathbb{R}^n)$  と表す

# 等長変換の具体的表示

## 演習

### 内容

### 第3章

### 第5章第1節

## 定理

$f \in \text{Iso}(\mathbb{R}^n)$  は  $A \in O(n)$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  を用いて

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

と表される

ただし  $O(n)$  は  $n$  次直交行列全体

## 証明

上のように表される写像が距離を保つことのみ示す

$$\begin{aligned} d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) &= \|A\mathbf{x} + \mathbf{b} - (A\mathbf{y} + \mathbf{b})\| \\ &= \|A(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \\ &= d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

## 2 次の直交行列

### 演習

$$A \in O(2) \\ \implies \exists \theta \in [0, 2\pi) \text{ s.t.}$$

$$A = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} & (|A| = 1) \\ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} & (|A| = -1) \end{cases}$$

$|A| = 1$  のときは原点を中心とする角  $\theta$  の回転を表す  
 $|A| = -1$  のときは原点を通る直線

$$x_2 \cos \frac{\theta}{2} = x_1 \sin \frac{\theta}{2}$$

に関する対称移動を表す

### 内容

### 第3章

### 第5章第1節



# 3 次以上の場合

## 演習

### 3 次の直交行列

$$A \in O(3)$$

$$\implies \exists P \in O(3), \exists \theta \in [0, 2\pi) \text{ s.t.}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$|A| = 1$  のときは回転を表す

$|A| = -1$  のときは平面に関する対称移動と回転の合成を表す

### 一般の直交行列

$$A \in O(n)$$

$|A| = 1$  のときは回転のいくつかの合成を表す

$|A| = -1$  のときは超平面に関する対称移動と回転のいくつかの合成を表す

超平面に関する対称移動を鏡映ともいう

# 第1問

## 演習

内容

第3章

第5章第1節

### 問題 (教科書「問 3.17」)

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \varphi) & -\sin(\theta - \varphi) \\ \sin(\theta - \varphi) & \cos(\theta - \varphi) \end{pmatrix}$$

を示せ

解

加法定理を用いる:

$$\begin{cases} \cos(\theta - \varphi) = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi \\ \sin(\theta - \varphi) = \sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \end{cases}$$

## 第2問

### 演習

#### 内容

#### 第3章

#### 第5章第1節

### 問題 (教科書「問題 3.6」)

$$f \in \text{Iso}(\mathbb{R}^n) \text{ s.t. } f(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$$

$$\implies \exists g \in \text{Iso}(\mathbb{R}^n) \text{ s.t. } (g \circ f)(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

を示せ

### 解

$$\mathbf{O} := \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A} := f(\mathbf{0})$$

M: 線分 OA の中点

$$\implies \mathbf{M} = \frac{1}{2}f(\mathbf{0})$$

$g$ : M を通り線分 OA と直交する超平面に関する鏡映

鏡映の定義より  $g$  は A を O へ写す

$$\text{すなわち } g(f(\mathbf{0})) = \mathbf{0}$$

$$\text{よって } (g \circ f)(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$



# 2 次超曲面の定義

演習

内容

第 3 章

第 5 章第 1 節

$n \in \mathbb{N}$

$a_{ij}, b_i, c \in \mathbb{R} \ (i, j = 1, 2, \dots, n)$

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$  の内の少なくとも 1 つは 0 ではない

2 次方程式

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0 \quad (\text{a})$$

の解  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  について考える

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

(a) あるいは (a) の解  $\mathbf{x}$  全体を 2 次超曲面という  
 $n = 2, 3$  のときは 2 次曲線, 2 次曲面ともいう



# 2 次超曲面の表示

## 演習

### 内容

### 第 3 章

### 第 5 章第 1 節

(a) において  $a_{ij} = a_{ji}$  としてよい

$$A := (a_{ij})_{n \times n}$$

$\Rightarrow A \in \text{Sym}(n)$  ( $n$  次対称行列全体)

$A \neq O$  (零行列)

さらに

$$\mathbf{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow$  (a) は

$${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} + 2{}^t\mathbf{b}\mathbf{x} + c = 0 \quad (\text{b})$$





# 2 次超曲面の変換

## 演習

### 内容

### 第 3 章

### 第 5 章第 1 節

## 定理

ユークリッド空間の等長変換は 2 次超曲面を 2 次超曲面へ写す

## 証明

$$f \in \text{Iso}(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{このとき } f^{-1} \in \text{Iso}(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{よって } \exists P \in O(n), \exists \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \text{ s.t.}$$

$$f^{-1}(\mathbf{y}) = P\mathbf{y} + \mathbf{q} \quad (\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n)$$

(b) に代入すると

$${}^t(P\mathbf{y} + \mathbf{q})A(P\mathbf{y} + \mathbf{q}) + 2{}^t\mathbf{b}(P\mathbf{y} + \mathbf{q}) + c = 0 \quad (\text{c})$$

次の (d), (e) を示せばよい

## 2 次超曲面の変換 (続き)

### 演習

#### 内容

#### 第3章

#### 第5章第1節

### 証明 (続き)

$${}^t\mathbf{y}({}^tPAP)\mathbf{y} + 2{}^t(\mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{b})P\mathbf{y} + {}^t\mathbf{q}\mathbf{A}\mathbf{q} + 2{}^t\mathbf{b}\mathbf{q} + c = 0 \quad (\text{d})$$

$${}^tPAP \in \text{Sym}(n) \setminus \{O\} \quad (\text{e})$$

(d) を示す:  $A$  の対称性などを用いる

$$\begin{aligned} & {}^t(P\mathbf{y} + \mathbf{q})A(P\mathbf{y} + \mathbf{q}) \\ &= ({}^t\mathbf{y}{}^tP + {}^t\mathbf{q})(A\mathbf{P}\mathbf{y} + A\mathbf{q}) \\ &= {}^t\mathbf{y}({}^tPAP)\mathbf{y} + {}^t\mathbf{y}{}^tPA\mathbf{q} + {}^t\mathbf{q}A\mathbf{P}\mathbf{y} + {}^t\mathbf{q}\mathbf{A}\mathbf{q} \\ &= {}^t\mathbf{y}({}^tPAP)\mathbf{y} + {}^t({}^t\mathbf{y}{}^tPA\mathbf{q}) + {}^t\mathbf{q}{}^tAP\mathbf{y} + {}^t\mathbf{q}\mathbf{A}\mathbf{q} \\ &= {}^t\mathbf{y}({}^tPAP)\mathbf{y} + {}^t(\mathbf{A}\mathbf{q}){}^t({}^tP){}^t({}^t\mathbf{y}) + {}^t(\mathbf{A}\mathbf{q})P\mathbf{y} + {}^t\mathbf{q}\mathbf{A}\mathbf{q} \\ &= {}^t\mathbf{y}({}^tPAP)\mathbf{y} + 2{}^t(\mathbf{A}\mathbf{q})P\mathbf{y} + {}^t\mathbf{q}\mathbf{A}\mathbf{q} \end{aligned}$$



# 第3問

## 演習

### 内容

### 第3章

### 第5章第1節

#### 問題 (教科書「問 5.1」)

$$A \in \text{Sym}(n) \setminus \{O\}$$

$$P \in O(n)$$

$$\implies {}^tPAP \in \text{Sym}(n) \setminus \{O\}$$

を示せ

#### 解

$${}^t({}^tPAP) = {}^tP {}^tA {}^t({}^tP)$$

$$= {}^tPAP$$

( $A$  は対称行列)

よって  ${}^tPAP \in \text{Sym}(n)$

$P \in O(n)$  より  $P, {}^tP$  は正則

$A \neq O$  と合わせると  ${}^tPAP \neq O$

# 対称行列が正則な場合

## 演習

### 内容

### 第3章

### 第5章第1節

(b) において  $A$  が正則であるとする  
 $A$  のすべての固有値は  $0$  ではない実数  
重複度も込めて  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  とする  
 $\implies \exists P \in O(n)$  s.t.

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$A$  は正則だから  $\exists \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  s.t.

$$A\mathbf{q} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

(d) は

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 + {}^t \mathbf{q} A \mathbf{q} + 2 {}^t \mathbf{b} \mathbf{q} + c = 0 \quad (\text{f})$$

## 第4問

### 演習

#### 内容

#### 第3章

#### 第5章第1節

### 問題 (教科書「問5.7」)

(f) において

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{b} & c \end{pmatrix}$$

(1)  ${}^t\mathbf{b}\mathbf{q} + c = \frac{|\tilde{A}|}{|A|}$  を示せ

(2) (f) は

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 + \frac{|\tilde{A}|}{|A|} = 0 \quad (\text{g})$$

となることを示せ

(3)  $n = 2$  のとき (g) が楕円を表すための条件を求めよ

(4)  $n = 2$  のとき (g) が双曲線を表すための条件を求めよ

(5)  $n = 2$  のとき (g) が球面を表すための条件を求めよ

## 第4問 (続き)

### 演習

#### 内容

#### 第3章

#### 第5章第1節

### (1) の解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{b} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & \mathbf{q} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & A\mathbf{q} + \mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{b} & {}^t\mathbf{b}\mathbf{q} + c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{b} & {}^t\mathbf{b}\mathbf{q} + c \end{pmatrix} \\ &\quad (A\mathbf{q} + \mathbf{b} = \mathbf{0}) \end{aligned}$$

最初と最後の式の行列式をとると

$$|\tilde{A}| = |A|({}^t\mathbf{b}\mathbf{q} + c)$$

さらに  $A$  は正則だから  $|A| \neq 0$

## 第4問 (続き)

### 演習

#### 内容

#### 第3章

#### 第5章第1節

### (2) の解

$${}^t\mathbf{q}A\mathbf{q} + 2{}^t\mathbf{b}\mathbf{q} + c = {}^t\mathbf{q}^tA\mathbf{q} + 2{}^t\mathbf{b}\mathbf{q} + c$$

( $A$  は対称行列)

$$= {}^t(A\mathbf{q})\mathbf{q} + 2{}^t\mathbf{b}\mathbf{q} + c$$

$$= {}^t(-\mathbf{b})\mathbf{q} + 2{}^t\mathbf{b}\mathbf{q} + c$$

( $A\mathbf{q} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ )

$$= {}^t\mathbf{b}\mathbf{q} + c$$

$$= \frac{|\tilde{A}|}{|A|}$$

((1))

## 第4問 (続き)

### 演習

#### 内容

#### 第3章

#### 第5章第1節

### (3) の解

(g) において  $n = 2$  とすると

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \frac{|\tilde{A}|}{|A|} = 0$$

楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

求める条件は

$$\lceil \lambda_1, \lambda_2 > 0, \frac{|\tilde{A}|}{|A|} < 0 \rceil$$

または

$$\lceil \lambda_1, \lambda_2 < 0, \frac{|\tilde{A}|}{|A|} > 0 \rceil$$



## 第4問（続き）

### 演習

内容

第3章

第5章第1節

### (4) の解

双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

求める条件は

$$\text{「}\lambda_1\lambda_2 < 0, |\tilde{A}| \neq 0\text{」}$$

### (5) の解

(g) において  $n = 3$  とすると

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \frac{|\tilde{A}|}{|A|} = 0$$

## 第4問 (続き)

### 演習

#### 内容

#### 第3章

#### 第5章第1節

### (5) の解 (続き)

球面の方程式は

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

求める条件は

$$\lceil \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 > 0, \frac{|\tilde{A}|}{|A|} < 0 \rceil$$

または

$$\lceil \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 < 0, \frac{|\tilde{A}|}{|A|} > 0 \rceil$$

$A = \lambda_1 E_3$  となる

$\frac{|\tilde{A}|}{|A|}$  に対する条件は  $|\tilde{A}| < 0$  と同値