

演習

2026年度「オリエンテーションゼミナール」
(藤岡敦担当) オンデマンド配信授業



内容

演習

内容

集合

写像

数列と関数

関数の微分

① 集合

② 写像

③ 数列と関数

④ 関数の微分



第1問

演習

内容

集合

写像

数列と関数

関数の微分

問題 (教科書「問題 1.1 (2)」)

A, B, C : 集合

等式

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \quad (1)$$

がなりたつことを示せ

解

$$(A \cup B) \setminus C = \{x \mid x \in A \cup B \text{ かつ } x \notin C\}$$

(差の定義)

$$= \{x \mid \text{「} x \in A \text{ または } x \in B \text{」 かつ } x \notin C\}$$

(和の定義)



第1問 (続き)

演習

内容

集合

写像

数列と関数

関数の微分

解 (続き)

$$\begin{aligned} &= \left\{ x \mid \begin{array}{l} \text{「}x \in A \text{ かつ } x \notin C\text{」 または} \\ \text{「}x \in B \text{ かつ } x \notin C\text{」} \end{array} \right\} \\ &= \{x \mid x \in A \setminus C \text{ または } x \in B \setminus C\} \\ &\quad (\text{差の定義}) \\ &= (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \\ &\quad (\text{和の定義}) \end{aligned}$$



第2問

演習

内容

集合

写像

数列と関数

関数の微分

問題 (教科書「問題 1.1 (10)」)

A, B, C : 集合

等式

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) \quad (2)$$

がなりたつことを示せ

解

$$(A \setminus B) \setminus C = \{x \mid x \in A \setminus B \text{ かつ } x \notin C\}$$

(差の定義)

$$= \{x \mid \text{「} x \in A \text{ かつ } x \notin B \text{」 かつ } x \notin C\}$$

(差の定義)

$$= \{x \mid x \in A \text{ かつ 「} x \notin B \text{ かつ } x \notin C \text{」}\}$$



第2問 (続き)

演習

内容

集合

写像

数列と関数

関数の微分

解 (続き)

$$\begin{aligned} &= \left\{ x \mid \begin{array}{l} x \in A \text{ かつ } \left[\begin{array}{l} \text{「} x \in B \text{ ではない」} \\ \text{かつ「} x \in C \text{ ではない」} \end{array} \right] \end{array} \right\} \\ &= \left\{ x \mid \begin{array}{l} x \in A \text{ かつ } \left[\begin{array}{l} \text{「} x \in B \text{ または} \\ x \in C \text{」 ではない} \end{array} \right] \end{array} \right\} \\ &= \{ x \mid x \in A \text{ かつ } \text{「} x \in B \cup C \text{ ではない」} \} \\ &\quad (\text{和の定義}) \\ &= \{ x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin (B \cup C) \} \\ &= A \setminus (B \cup C) \\ &\quad (\text{差の定義}) \end{aligned}$$

第3問

演習

内容

集合

写像

数列と関数

関数の微分

問題 (教科書「問題 1.4(1)」)

A, B, C : 集合

等式

$$(A \ominus B) \setminus C = \{A \setminus (B \cup C)\} \cup \{B \setminus (C \cup A)\} \quad (3)$$

がなりたつことを示せ

解

$$\begin{aligned}(A \ominus B) \setminus C &= \{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)\} \setminus C \\ &\quad (\text{対称差の定義}) \\ &= \{(A \setminus B) \setminus C\} \cup \{(B \setminus A) \setminus C\} \\ &= \dots\end{aligned}$$

第4問

演習

内容

集合

写像

数列と関数

関数の微分

問題 (教科書「問題 2.10」)

X : 集合, $X \neq \emptyset$
全体集合

$A \subset X$

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in A^c) \end{cases}$$

$\rightsquigarrow \chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ (定義関数)

$$F(X, \{0, 1\}) := \{f : X \rightarrow \{0, 1\}\}$$

$$\Phi(A) := \chi_A \quad (A \in 2^X)$$

$\rightsquigarrow \Phi : 2^X \rightarrow F(X, \{0, 1\})$

- (1) Φ は全射であることを示せ
- (2) Φ は単射であることを示せ

第4問 (続き)

演習

内容

集合

写像

数列と関数

関数の微分

(1) の解

$$f \in F(X, \{0, 1\})$$

$$A := f^{-1}(\{1\}) \in 2^X$$

$x \in A$ とすると A , 逆像の定義, χ_A の定義より

$$f(x) = \chi_A(x) = 1$$

$x \in A^c$ とすると $f(X) = \{0, 1\}$ より

$$f(x) = \chi_A(x) = 0$$

よって $f = \chi_A$

Φ の定義より $\Phi(A) = f$

したがって Φ は全射



第4問 (続き)

演習

内容

集合

写像

数列と関数

関数の微分

(2) の解

$A, A' \in 2^X$, $A \neq A'$ とする

このとき $A \setminus A' \neq \emptyset$ または $A' \setminus A \neq \emptyset$

$A \setminus A' \neq \emptyset$ のとき

$x \in A \setminus A'$ とすると $x \in A$ かつ $x \notin A'$

すなわち $x \in A$ かつ $x \in (A')^c$

定義関数の定義より $\chi_A(x) = 1$, $\chi_{A'}(x) = 0$

よって $\chi_A \neq \chi_{A'}$

$A' \setminus A \neq \emptyset$ のときも同様

Φ の定義より $\Phi(A) \neq \Phi(A')$

したがって Φ は単射

第5問

演習

内容

集合

写像

数列と関数

関数の微分

中間値の定理

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$: 連続

$f(a) \neq f(b)$

$\implies \forall l: f(a) \text{ と } f(b) \text{ の間の数}$
 $\exists c \in (a, b) \text{ s.t. } f(c) = l$

問題 (教科書「問題 3.5 (1)」)

中間値の定理において f が連続ではないとする
上のような l が存在しない例を挙げよ

解

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1) \\ 1 & (1 < x \leq 2) \end{cases}$$



第6問

演習

内容

集合

写像

数列と関数

関数の微分

ワイエルシュトラスの定理

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$: 連続

$\implies \exists c_1, c_2 \in [a, b] \text{ s.t. } \forall x \in [a, b], f(c_2) \leq f(x) \leq f(c_1)$

問題 (教科書「問題 3.5 (2)」)

ワイエルシュトラスの定理において f の定義域を有界な区間とする

上のような c_1 または c_2 が存在しない例を挙げよ

解

$$f(x) := \frac{1}{x} \quad (0 < x \leq 1)$$

第7問

演習

内容

集合

写像

数列と関数

関数の微分

問題 (教科書「問題 4.1」)

$$n \in \mathbb{N}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) := \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- (1) f は連続であることを示せ
- (2) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ のとき $f'(x)$ を計算せよ
- (3) $f'(0)$ が存在するための条件を求めよ
- (4) (3) の条件のもとで $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が連続となるための条件を求めよ

第7問 (続き)

演習

内容

集合

写像

数列と関数

関数の微分

(1) の解

まず $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とする

関数 x^n , $\sin x$ は $x = a$ で連続 (教科書「例 3.7」)

関数 $\frac{1}{x}$ は $x = a$ で連続 (教科書「問題 3.2」)

よって $f(x)$ は $x = a$ で連続 (教科書「問題 3.2」)

次に $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とする

$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ より

$$-|x|^n \leq x^n \sin \frac{1}{x} \leq |x|^n$$

はさみうちの原理を用いると

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

よって $f(x)$ は $x = 0$ で連続



第7問 (続き)

演習

内容

集合

写像

数列と関数

関数の微分

(2) の解

$$f'(x) = (x^n)' \sin \frac{1}{x} + x^n \left(\sin \frac{1}{x} \right)'$$

(積の微分法)

$$= nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} + x^n \left(\cos \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{x} \right)'$$

(合成関数の微分法)

$$\begin{aligned} &= nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} + x^n \left(\cos \frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$



第7問 (続き)

演習

内容

集合

写像

数列と関数

関数の微分

(3) の解

まず

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n \sin \frac{1}{x} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \sin \frac{1}{x}\end{aligned}$$

$n = 1$ のとき $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ は存在しない

$n \geq 2$ のとき (1) の議論と同様に

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \sin \frac{1}{x} = 0$$

すなわち $f'(0) = 0$

よって求める条件は $n \geq 2$

第7問 (続き)

演習

内容

集合

写像

数列と関数

関数の微分

(4) の解

$n = 2$ のとき (2) より

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

ここで $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ は存在しない

よって $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ は存在しない

$n \geq 3$ のとき (1) の計算と同様に

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$$

よって求める条件は $n \geq 3$

第8問

演習

内容

集合

写像

数列と関数

関数の微分

問題（教科書「問題 4.3」）

$$y := \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

- (1) x を y の式で表せ
- (2) (1) で求めた式を直接微分し $(\sinh^{-1} x)'$ を計算せよ
- (3) 逆関数の微分法を用いて (2) の式を導け

(1) の解

まず

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$$

$e^x > 0$ に注意すると

$$x = \log \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right)$$



第8問 (続き)

演習

内容

集合

写像

数列と関数

関数の微分

(2) の解

$$\begin{aligned}(\sinh^{-1} x)' &= \left\{ \log \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \right\}' \\&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)' \\&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} (x^2 + 1)' \right\} \\&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x \right) \\&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \\&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\end{aligned}$$

第8問 (続き)

演習

内容

集合

写像

数列と関数

関数の微分

(3) の解

$$\begin{aligned}(\sinh^{-1} y)' &= \frac{1}{(\sinh x)'} \\&\quad (\text{逆関数の微分法}) \\&= \frac{1}{\cosh x} \\&\quad \left(\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \\&= \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}} \\&\quad (\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1) \\&= \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}\end{aligned}$$

