

演習

2026年度「数学特論1」(藤岡敦担当)
オンデマンド配信授業

内容

演習

内容

第1回～第
3回

第4回

第5回

第6回

① 第1回～第3回

② 第4回

③ 第5回

④ 第6回



空間ベクトルの外積とベクトル値関数

演習

内容

第1回～第3回

第4回

第5回

第6回

空間ベクトルの外積

$$(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$$

外積:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) \\ = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)\end{aligned}$$

ベクトル値関数

関数を並べたもの

1変数の場合

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) \quad (t \in I)$$

と表すことができる

いろいろな演算や微分や積分を考えることができる

曲線の径数表示

演習

内容

第1回～第
3回

第4回

第5回

第6回

曲線の定義

曲線: 区間からの写像として表す (径数表示)

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$n = 2$: 平面曲線

$n = 3$: 空間曲線

正則曲線

γ : 正則

$\Updownarrow$ def.

$$\forall t \in I, \gamma'(t) \neq 0$$

第1問

演習

内容

第1回～第3回

第4回

第5回

第6回

問題 (第3回資料「問題3-2」)

$a, b > 0$

双曲線の陰関数表示:

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

ここで

$$\gamma(t) := (a \cosh t, b \sinh t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\leadsto \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

γ は上の双曲線の $x > 0$ の部分を表す

(1) γ は正則であることを示せ

(2) $t_0 \in \mathbb{R}$

γ の $t = t_0$ における接線の陰関数表示を求めよ



第1問 (続き)

演習

内容

第1回~第3回

第4回

第5回

第6回

(1) の解

$$\gamma'(t) = (a \sinh t, b \cosh t)$$

ここで $\cosh t > 0$

よって $\gamma'(t) \neq 0$

したがって γ は正則

(2) の解

$t = t_0$ における接線の径数表示は

$$l(t) = (a \cosh t_0, b \sinh t_0) + (a \sinh t_0, b \cosh t_0)(t - t_0) \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$(x, y) := l(t)$$

さらに計算する

曲線の長さ

演習

内容

第1回～第3回

第4回

第5回

第6回

標準内積とノルム

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

標準内積:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

ノルム:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

曲線の長さ

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$: 曲線

長さは

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

第2問

演習

内容

第1回～第3回

第4回

第5回

第6回

問題 (第4回資料「問題4-2」)

$a > 0$

$$\gamma(t) := (a \cos^3 t, a \sin^3 t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

$\rightsquigarrow \gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

アステロイドという

- (1) $\gamma'(t) = 0$ となる $t \in [0, 2\pi]$ を求めよ
- (2) γ の長さを求めよ
- (3) $t_0 \in [0, 2\pi]$: (1) で求めた以外の値
 γ の $t = t_0$ における接線の陰関数表示を求めよ
- (4) A: (3) の接線と x 軸の交点
B: (3) の接線と y 軸の交点
線分 AB の長さを求めよ

第2問 (続き)

演習

内容

第1回～第3回

第4回

第5回

第6回

(1) の解

$$\gamma'(t) = (-3a \cos^2 t \sin t, 3a \sin^2 t \cos t)$$

$\gamma'(t) = 0$ を解くと

$$t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$$

(2) の解

$$\begin{aligned} & 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\gamma'(t)\| dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt \\ &= \dots \end{aligned}$$

第2問 (続き)

演習

内容

第1回～第3回

第4回

第5回

第6回

(3) の解

第1問(2)と同様に計算すると

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\sin t_0)x + (\cos t_0)y = a \cos t_0 \sin t_0\}$$

(4) の解

(3) の陰関数表示の式を用いる

$y = 0$ を代入すると $x = a \cos t_0$

よって A の座標は $(a \cos t_0, 0)$

$x = 0$ を代入すると $y = a \sin t_0$

よって B の座標は $(0, a \sin t_0)$

したがって線分 AB の長さは

$$\sqrt{(a \cos t_0)^2 + (a \sin t_0)^2} = a$$

ベクトル場とスカラー場および勾配

演習

内容

第1回～第

3回

第4回

第5回

第6回

$$D \subset \mathbb{R}^n, D \neq \emptyset$$

n 次元ベクトル場:

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

スカラー場:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

D を開集合とする

勾配

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$: C^1 級のスカラー場

$$\text{grad } f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$



発散と回転

演習

内容

第1回～第3回

第4回

第5回

第6回

発散

$F = (F_1, F_2, \dots, F_n) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$: C^1 級の n 次元ベクトル場

$$\operatorname{div} F := \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

回転

$D \subset \mathbb{R}^2$ のとき

$F = (F_1, F_2) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$: C^1 級の 2 次元ベクトル場

$$\operatorname{rot} F := \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}$$

$D \subset \mathbb{R}^3$ のとき

$F = (F_1, F_2, F_3) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$: C^1 級の 3 次元ベクトル場

$$\operatorname{rot} F := \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$



第3問

演習

内容

第1回～第3回

第4回

第5回

第6回

問題 (第5回資料「問題 5-3」)

真空中における Maxwell の方程式を考える:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} E = 0 \\ \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \operatorname{div} B = 0 \\ c^2 \operatorname{rot} B = \frac{\partial E}{\partial t} \end{array} \right.$$

E, B : C^2 級であるとする

E, B の各成分は波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \Delta f$$

をみたすことを示せ



第3問 (続き)

演習

内容

第1回～第

3回

第4回

第5回

第6回

解

E についてのみ示す

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \text{rot} \frac{\partial B}{\partial t}$$

(Maxwell の方程式の第4式)

$$= -c^2 \text{rot} (\text{rot} E)$$

(Maxwell の方程式の第2式)

$$= -c^2 \{ \text{grad} (\text{div} E) - \Delta E \}$$

(第5回資料「定理5.1(3)」)

$$= c^2 \Delta E$$

(Maxwell の方程式の第1式)

線積分

演習

内容

第1回～第

3回

第4回

第5回

第6回

スカラー場の線積分

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$: 曲線

f : γ の像で連続なスカラー場

$$\int_{\gamma} f \, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt$$

ベクトル場の線積分

向き付けられた曲線を考える

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, 向き $t : a \rightarrow b$

F : γ の像で連続なベクトル場

$$\int_{\gamma} F \, \vec{ds} := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$



Green の定理

演習

内容

第 1 回～第

3 回

第 4 回

第 5 回

第 6 回

Green の定理

$D \subset \mathbb{R}^2$: 有界領域

境界は有限個の区分的に C^1 級の平面曲線の和集合

境界の向き: D の内部が進行方向の左手

∂D と表す

F : D 上の C^1 級のベクトル場

$$\Rightarrow \int_{\partial D} F \vec{ds} = \iint_D \text{rot } F \, dx dy$$



第4問

演習

内容

第1回～第

3回

第4回

第5回

第6回

問題 (第6回資料「問題 6-2」)

$D \subset \mathbb{R}^2$: 有界領域

境界は有限個の区分的に C^1 級の平面曲線の和集合

$$F(x, y) := \frac{1}{2}(-y, x) \quad ((x, y) \in D)$$

$\rightsquigarrow F: D$ 上の2次元ベクトル場

(1) $\int_{\partial D} F \vec{ds}$ は D の面積に等しいことを示せ

(2) $a, b > 0$

楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

により囲まれた領域の面積を求めよ

(3) 第2問のアステロイドにより囲まれた領域の面積を求めよ

第4問 (続き)

演習

内容

第1回～第3回

第4回

第5回

第6回

(1) の解

$$\int_{\partial D} F \vec{ds} = \iint_D \operatorname{rot} F \, dx dy$$

(Green の定理)

$$= \iint_D \left\{ \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} dx dy$$

$$\left(\operatorname{rot} (F_1, F_2) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

$$= \iint_D dx dy$$

これは D の面積

第4問 (続き)

演習

内容

第1回～第

3回

第4回

第5回

第6回

(2) の解

$$\gamma(t) := (a \cos t, b \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

向き付けられた平面曲線

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ 向き } t : 0 \rightarrow 2\pi$$

を定める

題意の楕円を表す

求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \vec{ds} &= \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{1}{2}(-b \sin t, a \cos t), (-a \sin t, b \cos t) \right\rangle dt \\ &= \dots \end{aligned}$$

第4問 (続き)

演習

内容

第1回～第

3回

第4回

第5回

第6回

(3) の解

向きは $t: 0 \rightarrow 2\pi$ とする

求める面積は

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} F \, d\vec{s} \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{1}{2}(-a \sin^3 t, a \cos^3 t), (-3a \cos^2 t \sin t, 3a \sin^2 t \cos t) \right\rangle dt \\ &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= \frac{3a^2}{2} \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)(1 - \sin^2 t) dt \\ &= \dots \end{aligned}$$