§1. 数列の極限

数学では極限操作によって望むものを得る場面が多々見られる. 数列の極限, 関数の極限はもちろんのこと, 関数の微分, 積分も極限操作を伴うものである. ここでは, 最も基本的な数列の極限について述べる.

数列とは自然数全体から実数全体への対応のことである. なお, ここでは複素数に対応する複素数列は考えないことにする. 自然数全体を $\mathbf{N}$ と書く. 即ち,

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

である. また, 実数全体を $\mathbf{R}$ と書く. 実数とは何であるかについてはあまり深入りしないが, 数直線とよばれるものを考え, 直線上の点を思い浮かべることが多い. 各 $n \in \mathbf{N}$ に対し $a_n \in \mathbf{R}$ が対応している数列を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ または単に $\{a_n\}$ と書く.

例 $n \in \mathbf{N}$ に対し

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

とおくと, $\{a_n\}$ は数列である.

上の例における数列 $\{a_n\}$ はいろいろな特徴をもっているが, まず $\{a_n\}$ は有理数列, 即ち各 a_n は有理数であることを注意しておこう. 有理数全体を $\mathbf{Q}$ と書く. 整数全体を $\mathbf{Z}$, 即ち

$$\mathbf{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots\}$$

と書くと,

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

である. なお, 集合 A に含まれるが集合 B に含まれない元全体を A と B の差集合とよび, $A - B$ または $A \setminus B$ と書く. ここまでに現れた集合 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ に関して, 包含関係

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

が成り立つ. それぞれの包含関係において等号は成立しない. 実際,

$$\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z} \subsetneq \mathbf{Q}$$

については言うまでもないであろう. また, $\sqrt{2}$ は有理数ではない実数であるから,

$$\mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{R}$$

である. しかし, $\sqrt{2}$ にいくらでも近い有理数が存在する. このような事実は一般の実数について成り立ち, 連続性とよばれる実数の性質と深く関わることである.

数列の場合も含めて, 極限について厳密に議論するには $\varepsilon - \delta$ 論法とよばれるものが必要となるが, これについては深入りせずに次のように定義しよう.

定義 $\{a_n\}$ を数列とする. ある $\alpha \in \mathbf{R}$ が存在し, n を十分大きく選べば a_n を α に限りなく近づけることができるとき,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$$

または

$$a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

と書き, 数列 $\{a_n\}$ は極限 α に収束するという.
数列 $\{a_n\}$ は収束しないとき, 発散するという.
特に, n を十分大きく選べば a_n を限りなく大きくできるとき,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

または

$$a_n \to +\infty \quad (n \to \infty)$$

と書き, 極限は $+\infty$ であるという.
同様に, 極限 $-\infty$ に発散する数列を定めることができる.

次のはさみうちの原理は極限を直接求めることができない数列に対し威力を発揮することがある.

はさみうちの原理　$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ を数列とする. 十分大きい $n \in \mathbf{N}$ に対し不等式

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

が成り立ち, 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が同じ極限 α に収束するならば, 数列 $\{c_n\}$ も α に収束する.

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ および $c \in \mathbf{R}$ に対し, 自然に数列

$$\{a_n + b_n\},\ \{ca_n\},\ \{a_n b_n\},\ \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$$

を考えることができる. 但し, 四つめの数列は $\{b_n\}$ が 0 となるときに困るが, $\{b_n\}$ の極限が 0 でなければ十分大きい n に対し考えることができる. これらの極限に関して次が成り立つ.

定理　$\{a_n\}, \{b_n\}$ をそれぞれ極限 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ に収束する数列とすると, 次の (1)〜(4) が成り立つ.
(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ (複号同順).
(2) $c \in \mathbf{R}$ とすると, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ca_n = c\alpha$.
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$.
(4) $\beta \neq 0$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$.

証明　(1) のみ示す.
三角不等式より,

$$\begin{aligned} 0 &\leq |(a_n \pm b_n) - (\alpha \pm \beta)| \\ &= |(a_n - \alpha) \pm (b_n - \beta)| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

はさみうちの原理より,

$$\lim_{n\to\infty} |(a_n \pm b_n) - (\alpha \pm \beta)| = 0.$$

即ち,

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta.$$

□

最初に挙げた例の数列についての特徴を更に述べるために, 定義を二つ述べよう.

定義　$\{a_n\}$ を数列とする. ある $M \in \mathbf{R}$ が存在し, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し

$$a_n < M$$

が成り立つとき, 数列 $\{a_n\}$ は上に有界であるという.
同様に, 下に有界な数列を定めることができる.
上にも下にも有界な数列は単に有界であるという.

なお, 収束する数列は有界であることを $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて示すことができる.
もう一つの定義は次である.

定義　数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$$

が成り立つとき, 単調増加であるという.
同様に, 単調減少な数列を定めることができる.
単調増加数列, 単調減少数列を合わせて単に単調数列とよぶ.

実は最初に挙げた例の数列 $\{a_n\}$ は上に有界で単調増加であることが分かる. 証明には二項展開

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k y^{n-k}$$

を用いる. 但し, ${}_nC_k$ は

$${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

により定まる二項係数とよばれるものである. ここで述べた $\{a_n\}$ の特徴はとても重要なものである. なぜならば, このことによって数列 $\{a_n\}$ の極限の存在が保証されるからである. 即ち, $\mathbf{R}$ が $\mathbf{Q}$ と決定的に異なるのは次の連続の公理が成り立つことである.

連続の公理　有界な単調数列は収束する.

例 (自然対数の底または Napier の定数)
連続の公理より, 極限

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

が存在する. この極限を e と書き, 自然対数の底または Napier の定数とよぶ.
e の値は

$$e = 2.718281828\ldots$$

となるが, 無理数であることが Maclaurin の定理を用いて示すことができる.

例 (Archimedes の原理)
等式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \ \lim_{n\to\infty} n = +\infty, \ \lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty, \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

は常識として扱って構わないが, 実はこれらは Archimedes の原理とよばれ, 連続の公理と深く関わることである.

問題 1

1. 次の (1), (2) により定まる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ.

(1) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$.

(2) $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}$.

2. $x \in \mathbf{R}$ に対し

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \cos^{2m}(n!\pi x)$$

とおく. $f(x)$ の値を求めよ. なお, $f(x)$ は Dirichlet の関数とよばれる.

3. $a, b > 0$ とし, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(b+\frac{a}{b}\right),\ a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{a}{a_{n-1}}\right)\ (n \geq 2)$$

により定める.

(1) 数列 $\{a_n\}$ は単調減少であることを示せ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ.

4. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sqrt[n]{n} - 1$$

により定める.

(1) 二項展開を用いることにより, 不等式

$$n(n-1)a_n^2 + 2na_n - 2(n-1) \leq 0$$

が成り立つことを示せ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ.

問題 1 の解答

1. (1) 求める極限は

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} &= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{2}\\ &= e^2.\end{aligned}$$

(2) 求める極限は

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} &= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}\right\}^{-1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right\}^{-1}\\ &= (e\cdot 1)^{-1}\\ &= e^{-1}.\end{aligned}$$

2. $x\in\mathbf{Q}$ のとき, 十分大きい $n\in\mathbf{N}$ に対し $n!x$ は整数となるから,

$$\cos(n!\pi x) = \pm 1.$$

よって, 十分大きい $n\in\mathbf{N}$ に対し

$$\cos^{2m}(n!\pi x) = 1$$

となるから,

$$f(x) = 1.$$

$x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ のとき, 任意の $n\in\mathbf{N}$ に対し $n!x$ は整数ではないから,

$$-1 < \cos(n!\pi x) < 1.$$

よって,

$$\lim_{m\to\infty}\cos^{2m}(n!\pi x) = 0$$

だから,

$$f(x) = 0.$$

3. (1) 定義より,

$$a_n > 0$$

で, 相加平均と相乗平均の関係より,

$$a_n \geq \sqrt{a}.$$

特に, 数列 $\{a_n\}$ は下に有界.

よって,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) - a_n \\ &= \frac{a - a_n^2}{2a_n} \leq 0. \end{aligned}$$

従って,

$$a_{n+1} \leq a_n.$$

即ち, 数列 $\{a_n\}$ は単調減少.

(2) (1) より, $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少数列.
よって, 連続の公理より, 数列 $\{a_n\}$ の極限 $\alpha \in \mathbf{R}$ が存在する.
数列 $\{a_n\}$ の定義の式において, $n \to \infty$ とすると,

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{a}{\alpha}\right).$$

これを解くと,

$$\alpha = \pm\sqrt{a}.$$

ここで, $a_n \geq \sqrt{a}$ だから, 求める極限は $\sqrt{a}$.

4. (1) 定義より,

$$a_n \geq 0.$$

よって, 二項展開より,

$$\begin{aligned} n &= (1 + a_n)^n \\ &\geq {}_nC_0 \cdot 1 + {}_nC_1 a_n + {}_nC_2 a_n^2 \\ &= 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2. \end{aligned}$$

従って,

$$n(n-1)a_n^2 + 2na_n - 2(n-1) \leq 0.$$

(2) $n \geq 2$ のとき, (1) の不等式を解くと,

$$\frac{-n - \sqrt{n^2 + 2n(n-1)^2}}{n(n-1)} \leq a_n \leq \frac{-n + \sqrt{n^2 + 2n(n-1)^2}}{n(n-1)}.$$

ここで,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n \pm \sqrt{n^2 + 2n(n-1)^2}}{n(n-1)} = 0.$$

よって, はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$