§2. 関数の極限

数列の極限に続き, 1 変数関数とよばれる $\mathbf{R}$ の部分集合から $\mathbf{R}$ への対応およびその極限について考えよう. x を変数とする関数を $f(x)$ 等と書く. 1 変数関数の中でも実数係数の x の多項式により定まる関数, 三角関数, 指数関数, 対数関数は既に親しみのあるものであろう.
$a \in \mathbf{R}$ を固定しておき, $x = a$ の近くで定義された関数 $f(x)$ を考える. 但し, ここでは $f(x)$ は $x = a$ で定義されている必要はない. 「近く」という言葉が曖昧で気持ち悪いかもしれないが, $\mathbf{R}$ の位相の話に深入りしたくないので, このようなことはあまり気にしないことにする.

定義　ある $l \in \mathbf{R}$ が存在し, x を $x \neq a$ をみたしながら a に十分近づければ, $f(x)$ を l に限りなく近づけることができるとき,

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

または

$$f(x) \to l \quad (x \to a)$$

と書き, $f(x)$ は $x = a$ で l に収束するという. このとき, l を $f(x)$ の $x = a$ における極限とよぶ.
同様に,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l, \ \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

等を定めることができる.
ある $l \in \mathbf{R}$ が存在し, x を $a < x$ をみたしながら a に十分近づければ, $f(x)$ を l に限りなく近づけることができるとき,

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = l$$

と書き, l を $f(x)$ の $x = a$ における右極限とよぶ. なお, $a = 0$ のときは $x \to a+0$ を単に $x \to +0$ と書くことがある.
同様に,

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to a+0} f(x) = -\infty$$

を定めることができる.
また, 左極限についても定めることができる.

数列の極限と同様に, 関数の極限に対してもはさみうちの原理が成り立つ. 次の例は三角関数 $\sin x, \cos x$ の導関数を求めるときに用いられる.

例　$\mathbf{R} \setminus \{0\}$ で定義された関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

により定め, $f(x)$ の $x = 0$ における極限を求めよう.
まず, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, 半径 1, 中心角 x の扇形の面積を考えると, 不等式

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$$

が成り立つことに注意する.
これを変形すると,

$$\cos x < f(x) < 1.$$

$\cos x$, $f(x)$ はともに偶関数だから, この式は $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ のときも成り立つ.

ここで,

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1$$

だから, はさみうちの原理より,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

次の定理も数列の極限の場合の類似である.

定理　$f(x), g(x)$ を $x=a$ の近くで定義された関数, $l, m \in \mathbf{R}$ をそれぞれ $f(x), g(x)$ の $x=a$ における極限とすると, 次の (1)〜(4) が成り立つ.
(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = l \pm m$ (複号同順).
(2) $c\in\mathbf{R}$ とすると, $\displaystyle\lim_{x\to a} cf(x) = cl$.
(3) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x) = lm$.
(4) $m\neq 0$ のとき, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$.

上の (1)〜(4) は $a=\pm\infty$ としてもよい. また, 右極限および左極限についても, 同様の結果が成り立つ.
関数の極限の概念を用いて, 関数の連続性を定義することができる. $f(x)$ を $x=a$ の近くで定義された関数とする. 但し, 今度は $f(x)$ は $x=a$ でも定義されているとする.

定義　$f(x)$ は

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つとき, $x=a$ で連続であるという.

例　任意の $a\in\mathbf{R}$ に対し正弦関数 $\sin x$ は $x=a$ で連続である. 実際, 上の例における計算からも分かるように, 不等式

$$|\sin x| \le |x|$$

が任意の $x\in\mathbf{R}$ に対し成り立つから,

$$\begin{aligned}
0 &\le |\sin x - \sin a| \\
&= \left|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right| \\
&= 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\left|\cos\frac{x+a}{2}\right| \\
&\le 2\cdot\frac{|x-a|}{2}\cdot 1 \\
&= |x-a| \to 0 \quad (x\to a).
\end{aligned}$$

よって, はさみうちの原理より,

$$\lim_{x\to a}\sin x = \sin a$$

となり, $\sin x$ は $x=a$ で連続である.
同様に, 余弦関数 $\cos x$ も $x=a$ で連続であることが示される.

関数の極限に関する上の定理と関数の連続性の定義より, 直ちに次が成り立つ.

定理　関数 $f(x), g(x)$ が $x=a$ で連続ならば, 次の (1)〜(4) により定まる関数も $x=a$ で連続.

(1) $f(x) \pm g(x)$.
(2) $c \in \mathbf{R}$ とすると, $cf(x)$.
(3) $f(x)g(x)$.
(4) $g(a) \neq 0$ のとき, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

ここまでは関数がどこで定義されているか曖昧にしてきたが, 場合によってはこれをはっきりさせる必要がある. 区間とよばれる次の (1)〜(4) により定められる $\mathbf{R}$ の部分集合を考えよう.

(1) $(a,b) = \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\}$ $(a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\},\ b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\})$.
(2) $[a,b) = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x < b\}$ $(a \in \mathbf{R},\ b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\})$.
(3) $(a,b] = \{x \in \mathbf{R} | a < x \leq b\}$ $(a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\},\ b \in \mathbf{R})$.
(4) $[a,b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\}$ $(a, b \in \mathbf{R})$.

特に, $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ である. また, $a, b \in \mathbf{R}$ のときは $a < b$ としている. (1), (4) の区間をそれぞれ開区間, 閉区間とよぶが, 特に $a, b \in \mathbf{R}$ のときは重要で, それぞれ有界開区間, 有界閉区間とよぶ.
区間 I で定義された関数 $f(x)$ は任意の $x \in I$ で連続なとき, 区間 I で連続であるという. 例えば, 三角関数 $\sin x, \cos x$ は $\mathbf{R}$ で連続である. また, $a > 0$, $a \neq 1$ とすると, 指数関数 a^x は $\mathbf{R}$ で連続で, 対数関数 $\log_a x$ は開区間 $(0, +\infty)$ で連続である. 区間 I で連続な関数 $f(x), g(x)$ に対し上の定理と同様の結果が成り立つ. こうして既知の連続関数から新しい連続関数を作ることができる. 例えば, 実数係数の x の多項式により定まる関数は $\mathbf{R}$ で連続である.
更に, 合成関数とよばれるものも考えてみよう. $f(x), g(y)$ をそれぞれ区間 I, J で定義された関数で,

$$\{f(x)\,|x \in I\} \subset J$$

が成り立っているとすると, I で定義された関数 $(g \circ f)(x)$ を

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in I)$$

により定めることができる. $(g \circ f)(x)$ を f と g の合成関数とよぶ. 合成関数に関して次が成り立つ.

定理　$f(x), g(y)$ がそれぞれ $x=a$, $y=f(a)$ で連続ならば, $(g \circ f)(x)$ は $x=a$ で連続.
$f(x), g(y)$ がそれぞれ区間 I, J で連続ならば, $(g \circ f)(x)$ は I で連続.

有界閉区間で連続な関数に対する次の二つの定理はとても重要である.

中間値の定理　$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で連続な関数とする. $f(a) \neq f(b)$ ならば, $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の $l \in \mathbf{R}$ に対し, $f(c) = l$ となる $c \in (a,b)$ が存在する.

定理　有界閉区間で連続な関数は最大値および最小値をもつ. 即ち, $f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で連続な関数とすると, ある $c, c' \in [a,b]$ が存在し, 任意の $x \in [a,b]$ に対し

$$f(x) \leq f(c),\ f(c') \leq f(x)$$

が成り立つ.

上の定理における $f(c), f(c')$ をそれぞれ $f(x)$ の最大値, 最小値とよぶ.

問題 2

1. Napier の定数 e が数列の極限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

により定められたことを用いて, 次の (1) の関数の極限を求め, 更に (2)〜(4) の関数の極限も求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$. 但し, e を底とする対数関数を単に $\log x$ と書くことにする.

2. $\mathbf{R}$ で定義された関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0), \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

により定める. $f(x)$ の $x=0$ における連続性を調べよ.

3. 関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続ならば, 関数 $|f(x)|$ も $x=a$ で連続であることを示せ.

4. $f(x)$ を閉区間 $[0,1]$ で連続な関数とする. 任意の $x\in[0,1]$ に対し $f(x)\in[0,1]$ が成り立つならば, $f(c)=c$ となる $c\in[0,1]$ が存在することを示せ.

問題 2 の解答

1. (1) $x > 1$ のとき, $n \in \mathbf{N}$ を

$$n \le x < n+1$$

となるように選んでおくと,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

ここで,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{1}{1+\dfrac{1}{n+1}}\\ &= e\cdot 1\\ &= e.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= e\cdot 1\\ &= e.\end{aligned}$$

よって, はさみうちの原理より,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

(2) (1) より,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}\\ &= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t\\ &= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\\ &= e\cdot 1\\ &= e.\end{aligned}$$

(3) (1) より,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\\ &= e.\end{aligned}$$

(2) より,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\\ &= e.\end{aligned}$$

よって,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

(4) (3) より,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}\\ &= \log e\\ &= 1.\end{aligned}$$

2. $x \neq 0$ とすると,

$$\begin{aligned}0 &\leq \left|x\sin\frac{1}{x}\right|\\ &\leq |x| \to 0 \quad (x\to 0).\end{aligned}$$

よって, はさみうちの原理より,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} &= 0\\ &= f(0).\end{aligned}$$

従って, $f(x)$ は $x=0$ で連続.

3. 三角不等式より,

$$|f(x)| \leq |f(x)-f(a)| + |f(a)|,\ |f(a)| \leq |f(a)-f(x)| + |f(x)|$$

だから,

$$\begin{aligned}0 &\leq ||f(x)| - |f(a)||\\ &\leq |f(x)-f(a)| \to 0 \quad (x\to a).\end{aligned}$$

よって, はさみうちの原理より,

$$\lim_{x\to a}|f(x)| = |f(a)|.$$

即ち, $|f(x)|$ は $x=a$ で連続.

4. 関数 $g(x)$ を

$$g(x) = x - f(x) \quad (x\in[0,1])$$

により定めると, 仮定より, $g(x)$ は区間 $[0,1]$ で連続で,

$$g(0)\leq 0,\ g(1)\geq 0.$$

$g(0)=0$ または $g(1)=0$ のときは, それぞれ $c=0$, $c=1$ とおけばよい.
$g(0)<0$ かつ $g(1)>0$ のとき, 中間値の定理より, $g(c)=0$ となる $c\in[0,1]$ が存在する.
このとき,

$$f(c) = c.$$