§3. 逆三角関数と双曲線関数

ここまでに現れた, 多項式により定まる関数, 三角関数, 指数関数, 対数関数は初等関数とよばれる関数である. ここでは初等関数の新しい仲間である逆三角関数と双曲線関数について述べよう.
まず, 逆三角関数を定義するために逆関数について考える. 以下では関数がどこで定義されているか, そしてどこに値をとるか, 即ち関数の定義域と値域が重要である.
$f(x)$ を $\mathbf{R}$ の部分集合 I で定義された関数とし, $\mathbf{R}$ の部分集合 J を

$$J = \{f(x)|x \in I\}$$

により定める. I, J がそれぞれ $f(x)$ の定義域, 値域とよばれるものである.

定義　J で定義された関数 $g(y)$ で,

$$(g \circ f)(x) = x \ (x \in I), \ (f \circ g)(y) = y \ (y \in J)$$

をみたすものが存在するとき, $g(y)$ を $f(x)$ の逆関数とよび, $f^{-1}(y)$ と書く.

定義より, 関数 $f(x)$ の逆関数 $g(y)$ が存在するとき, $f(x)$ は $g(y)$ の逆関数, 即ち

$$f(x) = g^{-1}(x)$$

である.
逆関数の存在を保証する定理について述べるために次の定義を行おう.

定義　$f(x)$ を $\mathbf{R}$ の部分集合 I で定義された関数とする. $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ ならば, $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つとき, $f(x)$ は I で単調増加であるという.
同様に, 単調減少な関数を定めることができる.
単調増加関数, 単調減少関数を合わせて単に単調関数とよぶ.

定理　$f(x)$ を区間 I で連続な単調関数とすると, $f(x)$ の値域 J は区間で, J で定義された $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(y)$ が存在する. 更に, $f^{-1}(y)$ は J で連続な単調関数.

この定理を用いて逆三角関数が定義されるが, その前に既に親しみのある例で上の定理を考えてみよう.

例 (指数関数と対数関数)
$a > 0$, $a \neq 1$ とすると, 指数関数 a^x は $\mathbf{R}$ で連続な関数である.
ここで, $a > 1$ のとき, a^x は単調増加で,

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0, \ \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty,$$

また, $0 < a < 1$ のとき, a^x は単調減少で,

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty, \ \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

よって, 上の定理より, 開区間 $(0, +\infty)$ で連続な a^x の逆関数が存在する. これが a を底とする対数関数 $\log_a y$ である.
指数関数の単調性に対応して, $a > 1$ のとき, $\log_a y$ は単調増加で, $0 < a < 1$ のとき, $\log_a y$ は単調減少である. また, $\log_a y$ の値域は $\mathbf{R}$ である.
逆に, $\log_a x$ の逆関数は a^y である.

逆関数の定義より, 等式

$$\log_a a^x = x,\ a^{\log_a x} = x$$

が成り立つ.
なお, 数学では e を底とする対数関数を単に $\log x$ と書くことが多い. また, e^x を $\exp x$ と書くこともある.

いよいよ逆三角関数を定義しよう.
まず, 正弦関数 $\sin x$ を閉区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ で連続な関数と考える.
このとき, $\sin x$ は単調増加で,

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

よって, 上の定理より, 閉区間 $[-1, 1]$ で連続で単調増加な $\sin x$ の逆関数が存在する. これを $\sin^{-1} y$ と書く. $\mathrm{Sin}^{-1}, \arcsin, \mathrm{Arcsin}$ といった記号が用いられることもある.
例えば,

$$x = \sin^{-1}\frac{1}{2}$$

とおくと,

$$\sin x = \frac{1}{2},\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

だから,

$$x = \frac{\pi}{6}.$$

次に, 余弦関数 $\cos x$ を閉区間 $[0, \pi]$ で連続な関数と考える.
このとき, $\cos x$ は単調減少で,

$$\cos 0 = 1,\ \cos\pi = -1.$$

よって, 上の定理より, 閉区間 $[-1, 1]$ で連続で単調減少な $\cos x$ の逆関数が存在する. これを $\cos^{-1} y$ と書く. $\mathrm{Cos}^{-1}, \arccos, \mathrm{Arccos}$ といった記号が用いられることもある.
例えば,

$$x = \cos^{-1}\frac{1}{2}$$

とおくと,

$$\cos x = \frac{1}{2},\ 0 \leq x \leq \pi$$

だから,

$$x = \frac{\pi}{3}.$$

最後に, 正接関数 $\tan x$ を開区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ で連続な関数と考える.
このとき, $\tan x$ は単調増加で,

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0}\tan x = -\infty,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\tan x = +\infty.$$

よって, 上の定理より, $\mathbf{R}$ で連続で単調増加な $\tan x$ の逆関数が存在する. これを $\tan^{-1} y$ と書く. $\mathrm{Tan}^{-1}, \arctan, \mathrm{Arctan}$ といった記号が用いられることもある.
例えば,

$$\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

定理 $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$.

証明 $y = \sin^{-1} x$ とおくと, 定義より,

$$\sin y = x,\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

ここで,

$$\sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right).$$

また,

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - y \leq \pi.$$

よって,

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - y.$$

従って,

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$

□

逆三角関数の次は双曲線関数を定義しよう. 指数関数を用いて

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

により定まる関数が双曲線関数である. 定義より, これらは $\mathbf{R}$ で連続な関数となる.

定理 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

証明 定義より,

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) \\
&= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \\
&= e^x e^{-x} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

上の定理より, xy 平面上の双曲線

$$x^2 - y^2 = 1$$

の $x > 0$ の部分が

$$\{(\cosh t, \sinh t) | t \in \mathbf{R}\}$$

と表されることが分かる. これが双曲線関数の名前の由来である.
双曲線関数に対し三角関数を円関数とよぶことがある. 等式

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

を思い出そう.

問題 3

1. $\theta = \tan^{-1} \dfrac{1}{5}$ とおく.

(1) $\tan 4\theta$ の値を求めよ.

(2) $\tan\left(4\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ の値を求めよ.

(3) 不等式

$$-\frac{\pi}{4} < 4\theta - \frac{\pi}{4} < \frac{5}{12}\pi$$

が成り立つことを示せ.

(4) 等式

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

が成り立つことを示せ.

2. $x, y \in [-1, 1]$ に対し

$$z = \sin^{-1} x + \sin^{-1} y$$

とおく. $z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ならば,

$$z = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

が成り立つことを示せ.

3. 双曲線関数に関する次の (1), (2) の加法公式を示せ.

(1) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$.

(2) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.

4. 等式

$$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

が成り立つことを示せ.

問題 3 の解答

1. (1) 倍角の公式より,

$$\begin{aligned}\tan 2\theta &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\\ &= \frac{2\cdot\dfrac{1}{5}}{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}\\ &= \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

よって, 再び倍角の公式より,

$$\begin{aligned}\tan 4\theta &= \frac{2\tan 2\theta}{1-\tan^2 2\theta}\\ &= \frac{2\cdot\dfrac{5}{12}}{1-\left(\dfrac{5}{12}\right)^2}\\ &= \frac{120}{119}.\end{aligned}$$

(2) 加法公式より,

$$\begin{aligned}\tan\left(4\theta-\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\tan 4\theta - \tan\dfrac{\pi}{4}}{1+\tan 4\theta\tan\dfrac{\pi}{4}}\\ &= \frac{\dfrac{120}{119}-1}{1+\dfrac{120}{119}\cdot 1}\\ &= \frac{1}{239}.\end{aligned}$$

(3) まず,

$$0 < \frac{1}{5} < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$\tan^{-1} x$ は単調増加だから,

$$0 < \theta < \frac{\pi}{6}.$$

よって,

$$-\frac{\pi}{4} < 4\theta - \frac{\pi}{4} < \frac{5}{12}\pi.$$

(4) (2), (3) より,

$$4\theta - \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{239}.$$

よって,

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}.$$

2. まず,

$$-\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1} x \le \frac{\pi}{2}$$

だから,

$$\begin{aligned}\cos\sin^{-1}x &= \sqrt{1-(\sin\sin^{-1}x)^2}\\ &= \sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

同様に,

$$\cos\sin^{-1}y = \sqrt{1-y^2}.$$

よって, 加法公式より,

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin(\sin^{-1}x+\sin^{-1}y)\\ &= (\sin\sin^{-1}x)\cos\sin^{-1}y + (\cos\sin^{-1}x)\sin\sin^{-1}y\\ &= x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

$z\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ だから,

$$z = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right).$$

3. (1) 定義より,

$$\begin{aligned}\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y &= \frac{e^x-e^{-x}}{2}\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}\frac{e^y-e^{-y}}{2}\\ &= \frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}\\ &= \sinh(x+y).\end{aligned}$$

(2) 定義より,

$$\begin{aligned}\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\frac{e^y-e^{-y}}{2}\\ &= \frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}\\ &= \cosh(x+y).\end{aligned}$$

4. 定義および等式

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x = 1$$

より,

$$\begin{aligned}1-\tanh^2 x &= 1-\frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}\\ &= \frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x}\\ &= \frac{1}{\cosh^2 x}.\end{aligned}$$