§4. 関数の微分

関数の極限の概念を用いて, 関数の微分を考えることができる. 1 変数関数 $f(x)$ を考えよう. x が a から b へと変わるとき, $f(x)$ は $f(a)$ から $f(b)$ へと変わるが, これらの変化の量の比

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

は平均変化率とよばれ, 関数の変化の様子を知る一つの目安となる. $f(x)$ を x で微分するということは a と b を限りなく近づけたときの瞬間の変化率を考えることである.

定義　$f(x)$ を区間 I で定義された関数とする.
$a \in I$ に対し極限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が存在するとき, $f(x)$ は $x=a$ で微分可能であるという. 上の極限を $f'(a)$ または $\dfrac{df}{dx}(a)$ と書き, $f(x)$ の $x=a$ における微分係数とよぶ.

$f(x)$ が任意の $a\in I$ で微分可能なとき, 関数 $f'(x)$ または $\dfrac{df}{dx}$ を $f(x)$ の導関数とよび, $f(x)$ は I で微分可能であるという.

微分可能性は連続性よりも強い概念である. 即ち, 次が成り立つ.

定理　関数 $f(x)$ は $x=a$ の近くで微分可能ならば, $x=a$ で連続.

証明　$x\neq a$ に対し

$$\varepsilon(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)$$

とおくと, 仮定より,

$$\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0.$$

よって,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))&=\lim_{x\to a}\{f'(a)(x-a)+\varepsilon(x)(x-a)\}\\&=0.\end{aligned}$$

従って,

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

即ち, $f(x)$ は $x=a$ で連続 □

まず, 基本的な関数の導関数を求めよう. 以下では関数がどこで定義されているかをいちいち書く必要は恐らくないであろう.

定理　次の (1)〜(4) が成り立つ.

(1) $n\in\mathbf{N}$ とすると, $\dfrac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$.

(2) $\dfrac{d\sin x}{dx}=\cos x$.

(3) $\dfrac{d\cos x}{dx}=-\sin x$.

(4) $\dfrac{de^x}{dx} = e^x$.

証明 (1): 二項展開より,

$$\begin{aligned}
\frac{dx^n}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left\{ ({}_nC_0 x^n + {}_nC_1 x^{n-1}h + {}_nC_2 x^{n-2}h^2 + \cdots + {}_nC_n h^n) - x^n \right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \cdots + h^{n-1} \right\} \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

(2): 等式

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

を用いると,

$$\begin{aligned}
\frac{d\sin x}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2}{h} \sin\frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

(3): (2) と同様に示すことができる.
(4): 等式

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

を用いると,

$$\begin{aligned}
\frac{de^x}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} \\
&= e^x \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log(1+t)} \\
&= e^x.
\end{aligned}$$

□

次の定理は更に複雑な関数の導関数を求める際によく用いられる.

定理 $f(x), g(x)$ を同じ区間で微分可能な関数とすると, 次の (1)〜(4) が成り立つ.
(1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ (複号同順).
(2) $c \in \mathbf{R}$ とすると, $(cf(x))' = cf'(x)$.
(3) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (積の微分法).
(4) $g(x) \neq 0$ のとき, $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ (商の微分法).

定理 $\dfrac{d\tan x}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

証明　商の微分法より,

$$\begin{aligned}\frac{d\tan x}{dx} &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{(\sin x)'\cos x - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

□

更に, 次の二つの定理もとても重要である.

合成関数の微分法　$f(x), g(y)$ をそれぞれ区間 I, J で微分可能な関数とし,

$$\{f(x)|x \in I\} \subset J$$

とすると,

$$\frac{d(g\circ f)}{dx}(a) = \frac{dg}{dy}(f(a))\frac{df}{dx}(a) \quad (a \in I).$$

例えば, 上では計算を省略した $\cos x$ の導関数は合成関数の微分法を用いると,

$$\begin{aligned}\frac{d\cos x}{dx} &= \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\}(-1) \\ &= -\sin x.\end{aligned}$$

逆関数の微分法　$f(x)$ を区間 I で微分可能な関数とし, $a \in I$ とする. $\dfrac{df}{dx}(a) \neq 0$ ならば,

$$\frac{df^{-1}}{dy}(f(a)) = \frac{1}{\dfrac{df}{dx}(a)}.$$

定理　$\dfrac{d\log|x|}{dx} = \dfrac{1}{x}.$

証明　$x > 0$ のとき, $y = \log x$ とおくと, $x = e^y$.
よって, 逆関数の微分法より

$$\begin{aligned}\frac{d\log x}{dx} &= \frac{1}{\dfrac{de^y}{dy}} \\ &= \frac{1}{e^y} \\ &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

$x < 0$ のときは, $t = -x$ とおき, 合成関数の微分法を用いればよい. □

問題 4

1. 関数 $f(x)$ の導関数を求める際に $y = f(x)$ とおき, 両辺の対数をとった式を x で微分すると計算が容易になる場合がある. この計算方法は対数微分法とよばれる. 対数微分法を用いることにより, 次の (1)〜(3) の関数の導関数を求めよ.
(1) x^a. 但し, $a \in \mathbf{R}$.
(2) a^x. 但し, $a > 0$. $a \neq 1$.
(3) x^x.

2. 逆関数の微分法を用いることにより, 逆三角関数 $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x$ の導関数を求めよ. 但し, $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x$ については $-1 < x < 1$ とする.

3. 双曲線関数 $\sinh x, \cosh x, \tanh x$ の導関数を求めよ.

問題 4 の解答

1. (1) $y = x^a$ とおくと,

$$\log y = a \log x.$$

両辺を x で微分すると,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}.$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x^a \frac{a}{x} \\ &= ax^{a-1}.\end{aligned}$$

(2) $y = a^x$ とおくと,

$$\log y = (\log a)x.$$

両辺を x で微分すると,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log a.$$

よって,

$$\frac{dy}{dx} = (\log a)a^x.$$

(3) $y = x^x$ とおくと,

$$\log y = x \log x.$$

両辺を x で微分すると,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \log x + x\frac{1}{x}.$$

よって,

$$\frac{dy}{dx} = x^x(\log x + 1).$$

2. まず, $y = \sin^{-1} x$ とおくと,

$$x = \sin y,\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\dfrac{d \sin y}{dy}} \\ &= \frac{1}{\cos y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.\end{aligned}$$

次に, $y = \cos^{-1} x$ とおくと,

$$x = \cos y,\ 0 < y < \pi.$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\dfrac{d\cos y}{dy}} \\ &= \frac{1}{-\sin y} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

更に, $y = \tan^{-1} x$ とおくと, $x = \tan y$ だから,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\dfrac{d\tan y}{dy}} \\ &= \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2 y} \\ &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

3. まず,

$$\begin{aligned}\frac{d\sinh x}{dx} &= \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \cosh x.\end{aligned}$$

次に,

$$\begin{aligned}\frac{d\cosh x}{dx} &= \frac{d}{dx}\frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \sinh x.\end{aligned}$$

更に,

$$\begin{aligned}\frac{d\tanh x}{dx} &= \frac{d}{dx}\frac{\sinh x}{\cosh x} \\ &= \frac{(\sinh x)' \cosh x - (\sinh x)(\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x}.\end{aligned}$$