§5. 平均値の定理

ここでは微分可能な関数の性質を調べる上で, 基本的かつ重要である平均値の定理とそれに関わる事実について述べよう.
以下に現れる定理については, 関数をグラフとよばれる xy 平面上の曲線と同一視して考えると理解しやすいであろう. 区間 I で定義された関数 $f(x)$ のグラフとは xy 平面の部分集合

$$\{(x, f(x))|x \in I\}$$

のことで, xy 平面上の曲線を表す. これを

$$y = f(x) \quad (x \in I)$$

とも書く. また, グラフを念頭に置いているときは, 始めから関数 $y = f(x)$ と書くことも多い. このとき, $x = a$ における $f(x)$ の値を $y(a)$ とも書く.
関数 $f(x)$ が微分可能なとき, $f(x)$ のグラフに対し $x = a$ における接線を考えることができる. これは

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

により定まる xy 平面上の直線で, 点 $(a, f(a))$ を通る直線達の中で $f(x)$ のグラフを $(a, f(a))$ の近くで最も良く近似するものである.
§2 において有界閉区間で連続な関数が最大値および最小値をもつことを述べたが, 実際に微分法を用いる際には, 定義されているところ全体ではなく, 考えている点の近くで関数が最大か最小であるかを調べることから始めることが多い. このようなことを考えるとき, 最大, 最小という言葉に対し, 極大, 極小という言葉を用いる. 極大値, 極小値は合わせて極値とよぶ.
微分可能な関数の極値をあたえる点の候補を求めるには, 次の定理が有用である.

定理 $f(x)$ を開区間 (a, b) で微分可能な関数とし, $c \in (a, b)$ とする. $f(c)$ が $x = c$ における $f(x)$ の極値ならば, $f'(c) = 0$. 特に, $f(c)$ が $x = c$ における最大値または最小値ならば, $f'(c) = 0$.

証明 $f(c)$ が最大値の場合のみ示す.
$h > 0$, $c + h \in (a, b)$ のとき,

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

$h < 0$, $c + h \in (a, b)$ のとき,

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

よって,

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

上の定理の結論を関数のグラフの言葉で説明すると, 点 $(c, f(c))$ は接線が x 軸に平行となる点であるということである.
また, 上の定理においては極値をあたえる点が区間の内部にあることに注意しよう. 例えば, 閉区間 $[0, 1]$ で定義された関数 $f(x) = x$ は $x = 0$ で最小値 0, $x = 1$ で最大値 1 をとるが, $f'(x) = 1$ である.

平均値の定理を示すために, 次を準備する.

Rolle の定理　$f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続で, 開区間 (a, b) で微分可能な関数とする. $f(a) = f(b)$ ならば, $f'(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ が存在する.

証明　定数関数の導関数は恒等的に 0 となるから, $f(x)$ が定数関数でない場合のみ示せばよい.
まず, $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続だから, 最大値および最小値をもつ.
ここで, $f(a) = f(b)$ で, $f(x)$ は定数関数でないから, $f(x)$ の最大値または最小値をあたえる点のどちらかは開区間 (a, b) に含まれる. 即ち, ある $c \in (a, b)$ が存在し, $f(c)$ は $f(x)$ の最大値または最小値.
よって, 上の定理より,

$$f'(c) = 0.$$

□

Rolle の定理の結論についても関数のグラフの言葉で説明すると, 接線が x 軸に平行となる点が存在するということである.

平均値の定理　$f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続で, 開区間 (a, b) で微分可能な関数とすると,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

となる $c \in (a, b)$ が存在する.

証明　関数 $g(x)$ を

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

により定めると,

$$g(a) = g(b).$$

よって, $g(x)$ に対し Rolle の定理を用いればよい. □

平均値の定理の結論を関数のグラフの言葉で説明すると, 2 点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ を結んで得られる線分の傾きと同じ傾きをもつ接線が存在するということである.
平均値の定理より, 微分可能な関数の増減に関する次の重要な定理が直ちに得られる.

定理　$f(x)$ を区間 I で微分可能な関数とする.
$f(x)$ は任意の $x \in I$ に対し $f'(x) = 0$ ならば, 定数関数.
$f(x)$ は任意の $x \in I$ に対し $f'(x) > 0$ ならば, I で単調増加.
$f(x)$ は任意の $x \in I$ に対し $f'(x) < 0$ ならば, I で単調減少.

なお, 上の定理において, ある $x \in I$ で $f'(x) = 0$ であったとしても, 例えばその近くで $f'(x) > 0$ ならば, $f(x)$ は単調増加となる.
Rolle の定理は平均値の定理の特別な場合とみなすことができる. 即ち, 平均値の定理において, $f(a) = f(b)$ とすればよい. 平均値の定理は次に述べる Cauchy の平均値の定理の特別な場合とみなすことができる. 実際, Cauchy の定理において, $g(x) = x$ とすればよい.

Cauchy の平均値の定理　$f(x), g(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続で, 開区間 (a, b) で微分可能な関数とする. 任意の $x \in (a, b)$ に対し $g'(x) \neq 0$ ならば,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる $c \in (a, b)$ が存在する.

証明　まず, Rolle の定理の対偶より, $g(a) \neq g(b)$ となることに注意する.
ここで, 関数 $h(x)$ を

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

により定めると,

$$h(a) = h(b).$$

よって, $h(x)$ に対し再び Rolle の定理を用いればよい. □

次の de l'Hospital の定理は場合によっては高等学校でも学ぶものであるが, 証明には Cauchy の平均値の定理が用いられる.

de l'Hospital の定理　I を開区間とし, $a \in I$ とする. また, $f(x), g(x)$ を $I \setminus \{a\}$ で微分可能な関数とし, 任意の $x \in I \setminus \{a\}$ に対し

$$g(x), g'(x) \neq 0$$

が成り立ち, 更に

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

が成り立つとする. 極限

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が存在するならば,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

de l'Hospital の定理に現れるような極限

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

を不定形の極限とよぶ.
また, de l'Hospital の定理は $a = \pm\infty$ または

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty, \ \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty \quad (\text{複号任意})$$

または右極限, 左極限のときも成り立つ.
なお, de l'Hospital の定理を用いる際には次の例のように計算して構わない.

例　de l'Hospital の定理より,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

問題 5

1. 次の関数のグラフのあたえられた点における接線の方程式を求めよ.

(1) $y = x^4 + \sqrt{x}$ $(x = 1)$.

(2) $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{5}{3}\tanh x\right)$ $(x = \log 2)$.

2. 次の (1), (2) の不等式が成り立つことを示せ.

(1) $x \leq \tan x$ $\left(0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(2) $\log(1 + x) \leq x$ $(x \geq 0)$.

3. 極限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^{-1} x - x}{x^3}$$

を求めよ.

問題 5 の解答

1. (1) まず, $y(1)=2$ で,

$$y' = 4x^3 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

だから,

$$y'(1) = \frac{9}{4}.$$

よって, 求める接線の方程式は

$$y = 2 + \frac{9}{4}(x-1).$$

即ち,

$$y = \frac{9}{4}x - \frac{1}{4}.$$

(2) まず,

$$\begin{aligned}\sinh\log 2 &= \frac{e^{\log 2} - e^{-\log 2}}{2} \\ &= \frac{2-\frac{1}{2}}{2} \\ &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\cosh\log 2 &= \frac{e^{\log 2} + e^{-\log 2}}{2} \\ &= \frac{2+\frac{1}{2}}{2} \\ &= \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}y(\log 2) &= \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}\right) \\ &= \tan^{-1} 1 \\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

次に,

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{5}{3}\tanh x\right)^2}\cdot\frac{5}{3}\frac{1}{\cosh^2 x}$$

だから,

$$\begin{aligned}y'(\log 2) &= \frac{1}{1+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}\right)^2}\cdot\frac{5}{3}\frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} \\ &= \frac{8}{15}.\end{aligned}$$

従って, 求める接線の方程式は

$$y = \frac{\pi}{4} + \frac{8}{15}(x - \log 2).$$

2. (1) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \tan x - x$$

により定めると,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \geq 0.$$

よって, $f(x)$ は単調増加で, $f(0) = 0$ だから, $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $f(x) \geq 0$. 即ち,

$$x \leq \tan x.$$

(2) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x - \log(1 + x)$$

により定めると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{x}{1+x} \geq 0. \end{aligned}$$

よって, $f(x)$ は単調増加で, $f(0) = 0$ だから, $x \geq 0$ のとき, $f(x) \geq 0$. 即ち,

$$\log(1 + x) \leq x.$$

3. de l'Hospital の定理より,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sin^{-1} x - x}{x^3} &= \lim_{x \to 0} \frac{(\sin^{-1} x - x)'}{(x^3)'} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - 1}{3x^2} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{3x^2\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \sqrt{1 - x^2})(1 + \sqrt{1 - x^2})}{3x^2\sqrt{1 - x^2}(1 + \sqrt{1 - x^2})} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1 - (1 - x^2)}{3x^2\sqrt{1 - x^2}(1 + \sqrt{1 - x^2})} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{3\sqrt{1 - x^2}(1 + \sqrt{1 - x^2})} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 1(1 + 1)} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$