§6. 高次の導関数

$f(x)$ を区間 I で微分可能な関数とすると, 導関数 $f'(x)$ が存在する. 更に $f'(x)$ が I で微分可能であるとすると, $f'(x)$ の導関数 $(f'(x))'$ を考えることができる. このとき, $f(x)$ は I で 2 回微分可能であるという. $(f'(x))'$ を $f''(x)$ と書き, $f(x)$ の 2 次の導関数とよぶ.
同様に, n 回微分可能な関数といった概念を定めることができる. 関数 $y = f(x)$ の n 次の導関数は

$$f^{(n)}(x),\ y^{(n)},\ \frac{d^n f}{dx^n},\ \frac{d^n y}{dx^n}$$

等と書く. また, $f^{(0)}(x) = f(x)$ と定める.

例　$f(x) = x^2$ とおくと,

$$f'(x) = 2x,\ f''(x) = 2,\ f'''(x) = 0.$$

関数 $f(x)$ は区間 I で n 回微分可能で, $f^{(n)}(x)$ が I で連続なとき, I で n 回連続微分可能または C^n 級であるという.
また, $f(x)$ は I で何回でも微分可能なとき, I で無限回微分可能または C^∞ 級であるという.

例　関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x|x| \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定めると,

$$f'(x) = 2|x|.$$

$f'(x)$ は原点で微分可能ではない. なぜならば,

$$\lim_{x\to+0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = 2$$

で,

$$\lim_{x\to-0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = -2$$

となるからである.
よって, $f(x)$ は $\mathbf{R}$ で C^1 級であるが, 2 回微分可能ではない.

C^n 級という言葉は定理の仮定を正確に述べるときに便利な言葉であるが, 実際の計算に現れる関数は C^∞ 級であることが多いので, あまり神経質になる必要はない.

定理　次の (1)〜(4) が成り立つ.
(1) $m \in \mathbf{N}$ とすると,

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n} & (1 \le n \le m), \\ 0 & (n > m). \end{cases}$$

(2) $\dfrac{d^n \sin x}{dx^n} = \sin\left(x + \dfrac{n}{2}\pi\right)$.

(3) $\dfrac{d^n \cos x}{dx^n} = \cos\left(x + \dfrac{n}{2}\pi\right)$.

(4) $a > 0,\ a \neq 1$ とすると, $\dfrac{d^n a^x}{dx^n} = (\log a)^n a^x$.

特に, $x^m, \sin x, \cos x, a^x$ は $\mathbf{R}$ で C^∞ 級.

証明　(1): ほとんど明らか.

(2): n に関する数学的帰納法により示す.
$n=0$ のとき, (2) は成り立つ.
$n=k$ $(k=0,1,2,\dots)$ のとき, (2) が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}\sin x}{dx^{k+1}} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^k \sin x}{dx^k}\right)\\ &= \frac{d}{dx}\sin\left(x+\frac{k}{2}\pi\right)\\ &= \cos\left(x+\frac{k}{2}\pi\right)\\ &= \sin\left(\left(x+\frac{k}{2}\pi\right)+\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \sin\left(x+\frac{k+1}{2}\pi\right).\end{aligned}$$

よって, $n=k+1$ のときも (2) が成り立つ.
(3): (2) と同様に示すことができる.
(4): ほとんど明らか. □

次の Leibniz の公式は積の微分法の一般化で, 二項展開の証明と同様に, 数学的帰納法により示すことができる.

Leibniz の公式　$f(x), g(x)$ を区間 I で n 回微分可能な関数とすると,

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

例　Leibniz の公式において, $n=3$ とすると,

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))''' &= {}_3C_0 f'''(x)g(x) + {}_3C_1 f''(x)g'(x) + {}_3C_2 f'(x)g''(x) + {}_3C_3 f(x)g'''(x)\\ &= f'''(x)g(x) + 3f''(x)g'(x) + 3f'(x)g''(x) + f(x)g'''(x).\end{aligned}$$

微分可能な関数の極値をあたえる点の候補は, 関数の定義されている区間の内部では微分が 0 となる点であった. 更に微分可能性を仮定すると, 求めた候補が実際に極値となるかどうかを判定できる場合がある.
以下では区間 I で微分可能な関数 $f(x)$ を xy 平面上の曲線

$$C : y = f(x) \quad (x \in I)$$

と同一視する.
$a \in I$ を固定しておき, C の点 $\mathrm{P}(a, f(a))$ における接線を l とする. C は P の近くで l より上にあるとき, P または $x=a$ で下に凸であるという.
C は任意の $a \in I$ で下に凸なとき, I で下に凸であるという.
同様に, 上に凸な曲線を定めることができる.
点 P の前後で C が l の上から下または下から上と変わるとき, P を変曲点とよぶ.
$f(x)$ が 2 回微分可能な場合, C の様子は次のように調べることができる.

定理　$f(x)$ を区間 I で 2 回微分可能な関数とし, $f''(x)$ は $a \in I$ で連続であるとする.
$f''(a) > 0$ ならば, 曲線 $y = f(x)$ は $x = a$ で下に凸.

$f''(a)<0$ ならば, 曲線 $y=f(x)$ は $x=a$ で上に凸.
$f''(a)=0$ のとき, $x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば, 点 $(a,f(a))$ は曲線 $y=f(x)$ の変曲点.

証明 $f''(a)>0$ の場合のみ示す.
関数 $g(x)$ を

$$g(x)=f(x)-\{f'(a)(x-a)+f(a)\}$$

により定めると,

$$g'(x)=f'(x)-f'(a),\ g''(x)=f''(x).$$

よって, $x=a$ の近くで $g(x)$ の増減表は次のようになる.

x	$x<a$	$x=a$	$x>a$
$g''(x)$	$+$	$+$	$+$
$g'(x)$	$\nearrow,\ -$	0	$\nearrow,\ +$
$g(x)$	$\searrow,\ +$	0	$\nearrow,\ +$

従って, 曲線 $y=f(x)$ は $x=a$ で下に凸. □

例 曲線 $y=x^2$ は $\mathbf{R}$ で下に凸.

例 曲線 $y=x^3$ は $x<0$ で上に凸, $x>0$ で下に凸.
また, 原点は変曲点.

上の定理から直ちに次が得られる.

定理 $f(x)$ を区間 I で 2 回微分可能な関数とし, $f''(x)$ は $a\in I$ で連続であるとする.
$f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ ならば, $f(a)$ は $x=a$ における $f(x)$ の極小値.
$f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ ならば, $f(a)$ は $x=a$ における $f(x)$ の極大値.

例 関数

$$f(x)=x\log x\quad(x>0)$$

を考えると,

$$f'(x)=\log x+1.$$

また,

$$f''(x)=\frac{1}{x}.$$

よって, $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

従って, 曲線 $y=f(x)$ は $x>0$ で下に凸.
また, $f(x)$ は $x=\frac{1}{e}$ で最小値 $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$ をとる.

問題 6

1. 関数 $f(x) = \tan^{-1} x$ を考える.

(1) $n = 2, 3, 4, \ldots$ のとき, 等式

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)xf^{(n)}(x) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) = 0$$

が成り立つことを示せ.

(2) $n \in \mathbf{N}$ のとき, $f^{(n)}(0)$ の値を求めよ.

2. xy 平面上の曲線は, 一般には区間 I で定義された変数 t の関数 $\varphi(t), \psi(t)$ を用いて,

$$\{(\varphi(t), \psi(t)) | t \in I\}$$

または

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \quad (t \in I)$$

と表される. 例えば, 関数 $f(x)$ のグラフは $x = t$, $y = f(t)$ とおけばよい. また, 原点中心, 半径 1 の円は

$$x = \cos t,\ y = \sin t \quad (t \in [0, 2\pi])$$

と表される.

$\varphi(t), \psi(t)$ を区間 I で微分可能な関数とし, $c \in I$, $\varphi'(c) \neq 0$ とする. このとき, $x = \varphi(c)$ の近くで定義された $\varphi(t)$ の逆関数 $\varphi^{-1}(x)$ が存在し,

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x))$$

と表される.

(1) $\dfrac{dy}{dx}(\varphi(c))$ を求めよ.

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}(\varphi(c))$ を求めよ.

3. $\mathbf{R}$ で定義された次の (1), (2) の関数 $f(x)$ について, グラフの凹凸および極値をもつかどうかを調べよ.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{a+b}{2}x^2 + abx$. 但し, $a < b$.

(2) $f(x) = xe^{-x}$.

問題 6 の解答

1. (1) まず,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

だから,

$$(1+x^2)f'(x) = 1.$$

両辺を $n-1$ 回微分すると, Leibniz の公式より,

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + (n-1)\cdot 2xf^{(n-1)}(x) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot 2f^{(n-2)}(x) = 0.$$

即ち,

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)xf^{(n)}(x) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) = 0.$$

(2) $n = 2, 3, 4, \ldots$ のとき, (1) の式に $x = 0$ を代入すると,

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0).$$

n が偶数のとき, $f(0) = 0$ だから,

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

n が奇数のとき,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0) \\
&= \{-(n-1)(n-2)\}\{-(n-3)(n-4)\}f^{(n-4)}(0) \\
&= \cdots \\
&= (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!f'(0) \\
&= (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!\cdot 1 \\
&= (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!.
\end{aligned}$$

2. (1) 合成関数の微分法と逆関数の微分法より,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}(\varphi(c)) &= \frac{d\psi}{dt}\left(\varphi^{-1}(\varphi(c))\right)\frac{d\varphi^{-1}}{dx}(\varphi(c)) \\
&= \frac{d\psi}{dt}(c)\frac{1}{\dfrac{d\varphi}{dt}(c)} \\
&= \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}.
\end{aligned}$$

(2) (1) より,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{d\varphi^{-1}}{dx} \\
&= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2}\frac{1}{\varphi'(t)}.
\end{aligned}$$

よって,

$$\frac{d^2y}{dx^2}(\varphi(c)) = \frac{\psi''(c)\varphi'(c) - \psi'(c)\varphi''(c)}{(\varphi'(c))^3}.$$

3. (1) まず,

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - (a+b)x + ab \\ &= (x-a)(x-b). \end{aligned}$$

また,

$$f''(x) = 2x - (a+b).$$

よって, $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$\frac{a+b}{2}$	$\cdots$	b	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(\frac{a+b}{a})$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$

従って, 曲線 $y = f(x)$ は $x < \dfrac{a+b}{2}$ で上に凸, $x > \dfrac{a+b}{2}$ で下に凸で, 点 $\left(\dfrac{a+b}{2}, f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right)$ は変曲点.
また, $f(x)$ は $x = a$ で極大値 $f(a)$ をとり, $x = b$ で極小値 $f(b)$ をとる.

(2) まず,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{-x} + x(-e^{-x}) \\ &= (1-x)e^{-x}. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 \cdot e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) \\ &= (x-2)e^{-x}. \end{aligned}$$

よって, $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$\frac{2}{e^2}$	$\searrow$

従って, 曲線 $y = f(x)$ は $x < 2$ で上に凸, $x > 2$ で下に凸で, 点 $\left(2, \dfrac{2}{e^2}\right)$ は変曲点.

また, $f(x)$ は $x = 1$ で最大値 $f(1) = \dfrac{1}{e}$ をとる.