## §7. Taylor の定理

関数は一つの点における高次の導関数の値を知ることにより, その近くの大まかな様子を知ることができる. これが Taylor の定理である. 平均値の定理は Taylor の定理の特別な場合とみなすことができる.

**Taylor の定理**　$f(x)$ を開区間 $I$ で $n$ 回微分可能な関数とし, $a, b \in I$, $a \neq b$ とすると,

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

となる $a$ と $b$ の間の $c \in \mathbf{R}$ が存在する.

**証明**　$A \in \mathbf{R}$ に対し

$$g(x) = f(x) + f'(x)(b-x) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + A(b-x)^n$$

とおく.
ここで,

$$g(a) = g(b)$$

となるように $A$ を定め, Rolle の定理を用いればよい. □

Taylor の定理における式の右辺の最後の項

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

を剰余項とよぶ.
また, Taylor の定理において,

$$b = x,\ \ c = a + \theta(x-a)$$

とおくと, $0 < \theta < 1$ で,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

となる. この右辺を $f(x)$ の $x = a$ における有限 Taylor 展開とよぶ. 有限 Taylor 展開は関数を多項式で近似することを可能にする.
なお, $a = 0$ のときの Taylor の定理, 有限 Taylor 展開はそれぞれ Maclaurin の定理, 有限 Maclaurin 展開ともよぶ.
$e^x, \sin x, \cos x$ の有限 Maclaurin 展開について考えてみよう. 以下では $\theta$ は $x$ に依存する 0 と 1 の間の実数である.

**例**　$e^x$ は $\mathbf{R}$ で $C^\infty$ 級で, 何回微分しても $e^x$ のままだから, 有限 Maclaurin 展開は

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n.$$

**例**　関数

$$f(x) = \sin x$$

を考える. §6 において扱ったように, $f(x)$ は $\mathbf{R}$ で $C^\infty$ 級で,

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k}{2}\pi\right).$$

よって,

$$\begin{aligned} f^{(k)}(0) &= \sin\frac{k}{2}\pi \\ &= \begin{cases} 0 & (k \text{ は偶数}), \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} & (k \text{ は奇数}). \end{cases} \end{aligned}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ とすると,

$$\begin{aligned} f^{(2n)}(\theta x) &= \sin(\theta x + n\pi) \\ &= (-1)^n \sin(\theta x) \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} f^{(2n+1)}(\theta x) &= \sin\left(\theta x + n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos(\theta x + n\pi) \\ &= (-1)^n \cos(\theta x). \end{aligned}$$

従って, $\sin x$ の有限 Maclaurin 展開は

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{(-1)^n \sin(\theta x)}{(2n)!} x^{2n}$$

または

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{(-1)^n \cos(\theta x)}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

同様に, $\cos x$ の有限 Maclaurin 展開は

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{(-1)^n \cos(\theta x)}{(2n)!} x^{2n}$$

または

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{(-1)^n \sin(\theta x)}{(2n-1)!} x^{2n-1}.$$

有限 Maclaurin 展開は関数の近似値を求める際に用いられるが, そのときの誤差は剰余項を評価することにより得られる. 次に述べる漸近展開は誤差の評価はできないが, 有用なものである. まず, Landau の記号について説明しよう.

**定義** $x = a$ の近くで定義された関数 $f(x), g(x)$ に対し,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

が成り立つとき,

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a)$$

と書く. $o$ を Landau の記号とよぶ.

**例**　de l'Hospital の定理より,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{1}\\ &= 0.\end{aligned}$$

よって,

$$e^x - 1 - x = o(x) \quad (x \to 0).$$

これを

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad (x \to 0)$$

と書く.

漸近展開について述べよう. 証明は省略するが, $f^{(n)}(x)$ の $x=a$ における連続性が必要である.

**定理**　$f(x)$ を $x=a$ の近くで $C^n$ 級の関数とすると,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n) \quad (x \to a).$$

関数 $f(x)$ が $C^\infty$ 級ならば, 有限 Taylor 展開の和の部分を無限和にして, $x=a$ の近くで

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

が成り立つだろうか? 右辺を Taylor 級数または Taylor 展開, $a=0$ のときは Maclaurin 級数または Maclaurin 展開ともよぶ. 上の式が成り立つような関数は解析的または $C^\omega$ 級であるという. 関数は $C^\omega$ 級ならば, $C^\infty$ 級であるが, 逆は一般には成り立たない.

**定理**　次の (1)〜(6) の Maclaurin 展開が成り立つ.

(1) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbf{R})$.

(2) $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ $(x \in \mathbf{R})$.

(3) $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ $(x \in \mathbf{R})$.

(4) $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ $(-1 < x < 1)$.

(5) $\log(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ $(-1 \le x < 1)$.

(6) $\tan^{-1}x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ $(-1 \le x \le 1)$.

## 問題 7

**1.** 次の (1), (2) の有限 Maclaurin 展開を示せ. 但し, $\theta$ は $x$ に依存する 0 と 1 の間の実数である.

(1) $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k + \dfrac{1}{(1-\theta x)^{n+1}} x^n.$

(2) $\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{x^k}{k} - \dfrac{1}{n(1-\theta x)^n} x^n.$

**2.** 次の (1), (2) の定義を Landau の記号を用いて書け.
(1) 関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続である.
(2) 関数 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能である.

**3.** 関数 $f(x) = \sin^{-1} x$ を考えると, $n = 2, 3, 4, \ldots$ のとき, 等式

$$(1-x^2)f^{(n)}(x) - (2n-3)xf^{(n-1)}(x) - (n-2)^2 f^{(n-2)}(x) = 0$$

が成り立つことが分かる. このことを用いて $\sin^{-1} x$ の $x = 0$ における漸近展開が

$$\sin^{-1} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^n) \quad (x \to 0).$$

であることを示せ. 但し,

$$k!! = \begin{cases} k(k-2)(k-4)\cdots 2 & (k \text{ は偶数}), \\ k(k-2)(k-4)\cdots 1 & (k \text{ は奇数}), \end{cases}$$

また $0!! = (-1)!! = 1$ で, $k!!$ は $k$ の 2 重階乗とよばれる. なお, $\sin^{-1} x$ の Maclaurin 展開

$$\sin^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \le x \le 1)$$

が成り立つことが分かる.

**4.** Maclaurin 展開を用いて, 次の (1)〜(3) が成り立つことを示せ.

(1) $e = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}.$

(2) $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}.$

(3) $\dfrac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ (Leibniz の級数).

## 問題 7 の解答

**1.** (1) まず,

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

とおき, $k$ に関する数学的帰納法により,

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \tag{$*$}$$

が成り立つことを示す.
$k=0$ のとき, $(*)$ は成り立つ.
$k=m$ $(m=0,1,2,\ldots)$ のとき, $(*)$ が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned} f^{(m+1)}(x) &= \frac{d}{dx}\frac{m!}{(1-x)^{m+1}} \\ &= \frac{(m+1)!}{(1-x)^{m+2}}. \end{aligned}$$

よって, $k=m+1$ のときも $(*)$ は成り立つ.
$(*)$ より,

$$f^{(k)}(0) = k!$$

だから, $\dfrac{1}{1-x}$ の有限 Maclaurin 展開は

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k + \frac{1}{(1-\theta x)^{n+1}}x^n.$$

(2) まず,

$$g(x) = \log(1-x)$$

とおくと,

$$g'(x) = -\frac{1}{1-x}.$$

よって, $(*)$ より,

$$g^{(k)}(x) = -\frac{(k-1)!}{(1-x)^k} \quad (k \in \mathbf{N}).$$

従って,

$$g(0) = 0,\ g^{(k)}(0) = -(k-1)!\ (k \in \mathbf{N})$$

だから, $\log(1-x)$ の有限 Maclaurin 展開は

$$\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x^k}{k} - \frac{1}{n(1-\theta x)^n}x^n.$$

**2.** (1) $f(x)$ が $x=a$ で連続であるとは

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことだから, 即ち

$$f(x) = f(a) + o(1) \quad (x \to a).$$

(2) $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとは

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

が成り立つことだから, 即ち

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \quad (x \to a).$$

**3.** 等式

$$(1-x^2)f^{(n)}(x) - (2n-3)xf^{(n-1)}(x) - (n-2)^2 f^{(n-2)}(x) = 0$$

に $x=0$ を代入すると,

$$f^{(n)}(0) = (n-2)^2 f^{(n-2)}(0).$$

$n$ が偶数のとき, $f(0)=0$ だから,

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

$n$ が奇数のとき,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

だから,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= (n-2)^2 f^{(n-2)}(0) \\
&= (n-2)^2 (n-4)^2 f^{(n-4)}(0) \\
&= \cdots \\
&= \{(n-2)!!\}^2 f'(0) \\
&= \{(n-2)!!\}^2 \cdot 1 \\
&= \{(n-2)!!\}^2.
\end{aligned}$$

ここで, $k = 0, 1, 2, \ldots$ のとき,

$$\begin{aligned}
\frac{[\{(2k+1)-2\}!!]^2}{(2k+1)!} &= \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{(2k)!!(2k-1)!!(2k+1)} \\
&= \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)}.
\end{aligned}$$

よって, $\sin^{-1} x$ の $x=0$ における漸近展開は

$$\sin^{-1} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^n) \quad (x \to 0).$$

**4.** (1) $e^x$ の Maclaurin 展開において, $x=1$ とおけばよい.
(2) $\log(1-x)$ の Maclaurin 展開において, $x=-1$ とおけばよい.
(3) $\tan^{-1} x$ の Maclaurin 展開において, $x=1$ とおけばよい.