§8. 定積分と不定積分

ここまで考えてきた微分とは逆の操作を考えよう.

定義　$f(x), F(x)$ を同じ区間で定義された関数とする. $F(x)$ が微分可能で,

$$F'(x) = f(x)$$

が成り立つとき,

$$F(x) = \int f(x)dx$$

と書き, $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とよぶ.

一つの関数に対する原始関数は一通りには定まらない. 実際, $F(x), G(x)$ をともに関数 $f(x)$ の原始関数とすると,

$$\begin{aligned}(F(x) - G(x))' &= F'(x) - G'(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

だから, §5 において述べたことより, ある $C \in \mathbf{R}$ が存在し

$$F(x) - G(x) = C.$$

即ち, 原始関数は定数を除いて一意的である. この定数 C を積分定数とよぶ.
次の定理は原始関数の定義から明らかである. なお, 以下では積分定数は省略することにする.
また, 原始関数

$$\int \frac{1}{f(x)}dx$$

は

$$\int \frac{dx}{f(x)}$$

とも書く.

定理　次の (1)〜(8) が成り立つ.

(1) $a \in \mathbf{R}$, $a \neq -1$ とすると, $\displaystyle\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}.$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x|.$

(3) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x.$

(4) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x.$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x.$

(6) $a > 0$, $a \neq 1$ とすると, $\displaystyle\int a^x dx = \frac{1}{\log a}a^x.$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x.$

(8) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x.$

上の定理の (7) は

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x$$

としてもよい. §3 において等式

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

を示したことを思い出そう.
原始関数は平面内の図形の面積と深い関係がある. まず, 定積分について述べよう. なお, 面積の厳密な定義は省略することにする.

定義　$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で定義された関数とする. 曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = a$, $x = b$ および x 軸で囲まれた図形の面積を x 軸より上の部分は正, 下の部分は負として加えたものが存在するとき, これを

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書き, $f(x)$ の $[a,b]$ における定積分とよぶ. このとき, $f(x)$ は $[a,b]$ で積分可能であるという. また, $f(x)$ を被積分関数とよぶ.

有界閉区間で定義された連続関数は積分可能である. 即ち, 次が成り立つ.

定理　$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で連続な関数とすると, 定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

が存在する.

$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で積分可能な関数とし, 定積分を用いて $[a,b]$ で定義された関数 $F(x)$ を

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

により定める. これを $f(x)$ の不定積分とよぶ.

微分積分学の基本定理　不定積分は被積分関数の原始関数. 即ち,

$$F'(x) = f(x).$$

微分積分学の基本定理を用いると, 定積分の定義において考えた図形の面積が原始関数の値の差として計算できることが分かる.

定理　$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で積分可能な関数, $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

証明　$F(x)$ と

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

がともに $f(x)$ の原始関数となることを用いればよい. □

以下では

$$F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b$$

と書く. また, 原始関数と不定積分を区別しないことにする.
積分の計算をする際には

$$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx,\ \int 1dx=\int dx$$

等と書くこともある.

例 $a\in\mathbf{R}$, $a\neq -1$ とすると,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^a dx &= \left[\frac{1}{a+1}x^{a+1}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{a+1}.\end{aligned}$$

以下では不定積分の基本的な性質を述べるが, 定積分の場合も同様である.

定理 $f(x), g(x)$ を同じ区間で積分可能な関数とすると, 次の (1)〜(4) が成り立つ.

(1) $\displaystyle\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$ (複号同順).

(2) $c\in\mathbf{R}$ とすると, $\displaystyle\int cf(x)dx=c\int f(x)dx$.

(3) $f(x), g(x)$ が微分可能ならば,

$$\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx\quad (部分積分法).$$

(4) 関数 $x(t)$ が微分可能ならば,

$$\int f(x)dx=\int f(x(t))x'(t)dt\quad (置換積分法).$$

(3), (4) はそれぞれ積の微分法, 合成関数の微分法を用いて示すことができる.
置換積分法を用いる際には, 例えば次のように計算してよい.

例 $f(x)$ が微分可能な関数のとき, $t=f(x)$ とおくと,

$$\frac{dt}{dx}=f'(x).$$

これを

$$dt=f'(x)dx$$

と書き,

$$\begin{aligned}\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx &= \int\frac{dt}{t}\\ &= \log|t|\\ &= \log|f(x)|.\end{aligned}$$

問題 8

1. 次の (1)〜(3) の定積分の値を求めよ

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x}.$

(2) $\displaystyle\int_0^1 e^x dx.$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx.$

2. 部分積分法を用いることにより, 次の (1)〜(3) の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \log x dx.$

(2) $\displaystyle\int \sin^{-1} x dx.$

(3) $\displaystyle\int \tan^{-1} x dx.$

3. $a > 0$ とする. $x = at$ とおき, 置換積分法を用いることにより, 次の (1), (2) の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2}.$

4. $f(x), g(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で積分可能な関数とする. 任意の $x \in [a, b]$ に対し

$$f(x) \leq g(x)$$

ならば,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

が成り立ち, 等号成立は $[a, b]$ 上で $f(x) = g(x)$ が成り立つときに限ることが分かる. このことを用いて, 不等式

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

を示せ.

問題 8 の解答

1. (1) 求める値は

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{dx}{x} &= [\log x]_1^e \\ &= 1.\end{aligned}$$

(2) 求める値は

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x dx &= [e^x]_0^1 \\ &= e - 1.\end{aligned}$$

(3) 求める値は

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx \\ &= -[\log \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\log \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log 2.\end{aligned}$$

2. (1) 部分積分法より,

$$\begin{aligned}\int \log x dx &= \int x' \log x dx \\ &= x \log x - \int x (\log x)' dx \\ &= x \log x - \int x \frac{1}{x} dx \\ &= x \log x - \int dx \\ &= x \log x - x.\end{aligned}$$

(2) 部分積分法より,

$$\begin{aligned}\int \sin^{-1} x dx &= \int x' \sin^{-1} x dx \\ &= x \sin^{-1} x - \int x (\sin^{-1} x)' dx \\ &= x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx \\ &= x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}.\end{aligned}$$

(3) 部分積分法より,

$$\begin{aligned}\int \tan^{-1} x dx &= \int x' \tan^{-1} x dx \\ &= x \tan^{-1} x - \int x(\tan^{-1} x)' dx \\ &= x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2).\end{aligned}$$

3. (1) $x = at$ とおくと,

$$dx = adt.$$

よって, 置換積分法より,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \int \frac{adt}{\sqrt{a^2 - a^2t^2}} \\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \sin^{-1} t \\ &= \sin^{-1} \frac{x}{a}.\end{aligned}$$

(2) $x = at$ とおくと,

$$dx = adt.$$

よって, 置換積分法より,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \int \frac{adt}{a^2 + a^2t^2} \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{a} \tan^{-1} t \\ &= \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}.\end{aligned}$$

4. まず,

$$f(x) \leq |f(x)|, \ -f(x) \leq |f(x)|$$

は常に成り立つから,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx, \quad -\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

よって,

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$