§9. 有理関数の積分

多項式の比として表される関数を有理関数とよぶ．ここでは有理関数の不定積分を考えよう．まず, x の有理関数は部分分数分解により, 次の (1)〜(3) の形の関数の和として表されることに注意しよう．

(1) x の多項式.

(2) $\dfrac{A}{(x-\alpha)^n}$ $(A, \alpha \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N})$.

(3) $\dfrac{Ax+B}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n}$ $(A, B, \alpha \in \mathbf{R},\ \beta \neq 0,\ n \in \mathbf{N})$.

部分分数分解は次のように未定係数法を用いて求めることができる.

例　有理関数

$$f(x) = \frac{x^4+x^3+x^2+2x+3}{x^3+1}$$

を考えると,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x(x^3+1)+(x^3+1)+x^2+x+2}{x^3+1} \\ &= x+1+\frac{x^2+x+2}{(x+1)(x^2-x+1)}. \end{aligned}$$

なお,

$$x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

である.
ここで,

$$\frac{x^2+x+2}{x^3+1} = \frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1} \quad (a, b, c \in \mathbf{R})$$

とおくと, 右辺は

$$\frac{a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)}{x^3+1} = \frac{(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c}{x^3+1}.$$

分子の係数を比較すると,

$$a+b=1,\ -a+b+c=1,\ a+c=2.$$

第 1 式と第 3 式より,

$$b=1-a,\ c=2-a.$$

第 2 式に代入すると,

$$-a+(1-a)+(2-a)=1.$$

これを解くと,

$$a=\frac{2}{3}.$$

よって,

$$b=\frac{1}{3},\ c=\frac{4}{3}.$$

従って,

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\frac{x+4}{x^2 - x + 1}.$$

x の多項式として表される関数の不定積分は容易に求めることができるから, 以下では上の (2), (3) の場合を考える.
まず, (2) の形の関数の不定積分は

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}dx = \begin{cases} A\log|x-\alpha| & (n=1), \\ \dfrac{A}{(1-n)(x-\alpha)^{n-1}} & (n \geq 2) \end{cases}$$

と直ちに求めることができる.
次に, (3) の形の関数の不定積分を考える.
$n = 1$ のとき,

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx &= \int \frac{A(x-\alpha)+A\alpha+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx \\ &= A\int \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx + (A\alpha+B)\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \\ &= \frac{A}{2}\log\{(x-\alpha)^2+\beta^2\} + (A\alpha+B)\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}. \end{aligned}$$

第 2 項に対して置換積分法を用いるために,

$$x - \alpha = \beta \tan t$$

とおくと,

$$dx = \frac{\beta}{\cos^2 t}dt.$$

よって,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} &= \int \frac{1}{\frac{\beta^2}{\cos^2 t}}\frac{\beta}{\cos^2 t}dt \\ &= \int \frac{dt}{\beta} \\ &= \frac{1}{\beta}t \\ &= \frac{1}{\beta}\tan^{-1}\frac{x-\alpha}{\beta}. \end{aligned}$$

従って,

$$\int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \frac{A}{2}\log\{(x-\alpha)^2+\beta^2\} + \frac{A\alpha+B}{\beta}\tan^{-1}\frac{x-\alpha}{\beta}.$$

$n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n}dx &= \int \frac{A(x-\alpha)+A\alpha+B}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n}dx \\ &= A\int \frac{x-\alpha}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n}dx + (A\alpha+B)\int \frac{dx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n} \\ &= \frac{A}{2(1-n)\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{n-1}} + (A\alpha+B)\int \frac{dx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n}. \end{aligned}$$

ここで, 第 2 項に現れた不定積分を

$$I_n = \int \frac{dx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n}$$

とおき, I_n に対する漸化式を求める.
途中で部分積分法を用いると,

$$\begin{aligned}
I_{n-1} &= \int \frac{dx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{n-1}} \\
&= \int \frac{(x-\alpha)^2+\beta^2}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n} dx \\
&= \int \frac{(x-\alpha)^2}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n} dx + \beta^2 \int \frac{dx}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n} \\
&= \int \left[\frac{1}{2(1-n)\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{n-1}}\right]' (x-\alpha) dx + \beta^2 I_n \\
&= \frac{x-\alpha}{2(1-n)\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{n-1}} - \int \frac{dx}{2(1-n)\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{n-1}} + \beta^2 I_n \\
&= -\frac{x-\alpha}{2(n-1)\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} + \beta^2 I_n.
\end{aligned}$$

よって, 求める漸化式は

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)\beta^2}\left[\frac{x-\alpha}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right].$$

となるから, 原理的には I_1 から順次 $I_2, I_3, \ldots$ と計算することができる.
従って, $n \geq 2$ のときも, (3) の形の関数の不定積分を求めることができる.
以上をまとめると次を得る

定理 有理関数の不定積分は有理関数, 対数関数, 逆三角関数を用いて表される.

例 最初の例の関数の不定積分は

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4+x^3+x^2+2x+3}{x^3+1} dx &= \int \left(x+1+\frac{2}{3}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\frac{x+4}{x^2-x+1}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}x^2+x+\frac{2}{3}\log|x+1|+\frac{1}{6}\int \frac{(2x-1)+9}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} dx \\
&= \frac{1}{2}x^2+x+\frac{2}{3}\log|x+1|+\frac{1}{6}\log(x^2-x+1) \\
&\qquad + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{1}{2}x^2+x+\frac{2}{3}\log|x+1|+\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)+\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

問題 9

1. 次の (1)〜(3) の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$. 但し, $a > 0$.

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + 1}$.

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + 1}$.

2. 不定積分

$$I_n = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^n} \quad (n \in \mathbf{N})$$

は漸化式

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

をみたす. このことを用いて, 定積分

$$J_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2)^n}$$

のみたす漸化式を求めよ.

問題 9 の解答

1. (1) まず,

$$\frac{1}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right).$$

よって,

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{a^2-x^2}&=\int\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)dx\\&=\frac{1}{2a}\left(\log|a+x|-\log|a-x|\right)\\&=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|.\end{aligned}$$

(2) まず,

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}\quad(a,b,c\in\mathbf{R})$$

とおくと, 右辺は

$$\frac{a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)}{x^3+1}=\frac{(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c}{x^3+1}.$$

分子の係数を比較すると,

$$a+b=0,\ -a+b+c=0,\ a+c=1.$$

第 1 式と第 3 式より,

$$b=-a,\ c=1-a.$$

第 2 式に代入すると,

$$-a-a+(1-a)=0.$$

これを解くと,

$$a=\frac{1}{3}.$$

よって,

$$b=-\frac{1}{3},\ c=\frac{2}{3}.$$

従って,

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^3+1}&=\int\left(\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)dx\\&=\frac{1}{3}\log|x+1|+\frac{1}{6}\int\frac{-(2x-1)+3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx\\&=\frac{1}{3}\log|x+1|-\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)+\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\\&=\frac{1}{3}\log|x+1|-\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

(3) まず,

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1} \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R})$$

とおくと, 右辺は

$$\frac{(ax+b)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(cx+d)(x^2+\sqrt{2}x+1)}{x^4+1}$$
$$= \frac{(a+c)x^3+(-\sqrt{2}a+b+\sqrt{2}c+d)x^2+(a-\sqrt{2}b+c+\sqrt{2}d)x+b+d}{x^4+1}.$$

分子の係数を比較すると,

$$a+c=0,\ -\sqrt{2}a+b+\sqrt{2}c+d=0,\ a-\sqrt{2}b+c+\sqrt{2}d=0,\ b+d=1.$$

これを解くと,

$$a=\frac{1}{2\sqrt{2}},\ b=\frac{1}{2},\ c=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\ d=\frac{1}{2}.$$

よって,

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \int \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right) dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{2\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{2}}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{2\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{2}}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} \right) dx$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log(x^2+\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \tan^{-1} \frac{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$- \frac{1}{4\sqrt{2}} \log(x^2-\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \tan^{-1} \frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1}(\sqrt{2}x+1)$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1}(\sqrt{2}x-1)$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{(\sqrt{2}x+1)+(\sqrt{2}x-1)}{1-(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)}$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}.$$

2. I_n に対する漸化式より,

$$J_n = \left[\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} \right]_0^1 + \frac{2n-3}{2n-2} J_{n-1}.$$

即ち,

$$J_n = \frac{1}{(n-1) \cdot 2^n} + \frac{2n-3}{2n-2} J_{n-1}.$$