§10. 無理関数と三角関数の積分

$f(x,y)$ を x と y の有理関数, 即ち x と y の多項式の比として表される関数とする. ここでは, x や y に無理関数や三角関数を代入して不定積分が求められる次の (1)〜(3) の場合について考える.

$$(1)\ \int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx\ (a,b,c,d\in\mathbf{R},\ ad-bc\neq 0).$$

$$(2)\ \int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx\ (a,b,c\in\mathbf{R},\ a\neq 0).$$

$$(3)\ \int f(\sin x,\cos x)dx.$$

これらの不定積分は置換積分法を用いることにより, 有理関数の不定積分に帰着されることが分かる. よって, §9 において述べたことから, 不定積分が求められることになる.
まず, (1) を考えよう.
変数変換

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

を行うと,

$$(cx+d)t^n=ax+b.$$

即ち,

$$x=\frac{dt^n-b}{-ct^n+a}.$$

よって,

$$\begin{aligned}dx&=\frac{ndt^{n-1}(-ct^n+a)-(dt^n-b)(-nct^{n-1})}{(-ct^n+a)^2}dt\\&=\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(-ct^n+a)^2}dt.\end{aligned}$$

従って,

$$\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int f\left(\frac{dt^n-b}{-ct^n+a}, t\right)\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(-ct^n+a)^2}dt$$

となり, 右辺は t の有理関数の不定積分である.
次に, (2) を考えよう.
$a>0$ のとき, 変数変換

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$$

を行うと,

$$ax^2+bx+c=t^2-2\sqrt{a}tx+ax^2.$$

即ち,

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}.$$

よって,

$$\begin{aligned}dx&=\frac{2t(2\sqrt{a}t+b)-(t^2-c)\cdot 2\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt\\&=\frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c)}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt.\end{aligned}$$

従って,

$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \int f\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, t - \frac{\sqrt{a}(t^2-c)}{2\sqrt{a}t+b}\right) \frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c)}{(2\sqrt{a}t+b)^2} dt$$

となり, 右辺は t の有理関数の不定積分である.
$a < 0$, $b^2 - 4ac > 0$ のとき, x の 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の実数解を α, β $(\alpha < \beta)$ とする.
変数変換

$$t = \sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}}$$

を行うと,

$$(x-\alpha)t^2 = \beta - x.$$

即ち,

$$x = \frac{\alpha t^2 + \beta}{t^2 + 1}.$$

よって,

$$\begin{aligned} dx &= \frac{2\alpha t(t^2+1) - (\alpha t^2 + \beta) \cdot 2t}{(t^2+1)^2} dt \\ &= \frac{2(\alpha - \beta)t}{(t^2+1)^2} dt. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x-\alpha)(x-\beta) \\ &= a \frac{\alpha t^2 + \beta - \alpha(t^2+1)}{t^2+1} \frac{\alpha t^2 + \beta - \beta(t^2+1)}{t^2+1} \\ &= \frac{-a(\beta-\alpha)^2 t^2}{(t^2+1)^2}. \end{aligned}$$

即ち,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{-a}(\beta - \alpha)t}{t^2+1}.$$

従って,

$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \int f\left(\frac{\alpha t^2 + \beta}{t^2+1}, \frac{\sqrt{-a}(\beta-\alpha)t}{t^2+1}\right) \frac{2(\alpha-\beta)t}{(t^2+1)^2} dt$$

となり, 右辺は t の有理関数の不定積分である.

例　$a \neq 0$ に対し変数変換

$$\sqrt{x^2+a} = t - x$$

を行うと,

$$x = \frac{t^2-a}{2t}, \ dx = \frac{t^2+a}{2t^2} dt.$$

よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} &= \int \frac{1}{t-\dfrac{t^2-a}{2t}}\frac{t^2+a}{2t^2}dt \\ &= \int \frac{dt}{t} \\ &= \log|t| \\ &= \log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|.\end{aligned}$$

最後に, (3) を考えよう.
変数変換

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

を行うと,

$$\begin{aligned}\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \\ &= 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} \\ &= 2\tan\frac{x}{2}\frac{1}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}} \\ &= \frac{2t}{1+t^2}.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2}-1 \\ &= \frac{2}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}-1 \\ &= \frac{2}{1+t^2}-1 \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2}.\end{aligned}$$

更に,

$$x = 2\tan^{-1} t$$

だから,

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

よって,

$$\int f(\sin x, \cos x)dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

となり, 右辺は t の有理関数の不定積分である.
なお, 実際には上に現れた置換積分法以外の方法を用いた方が計算が簡単になる場合もある.

問題 10

1. 次の (1)〜(3) の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

(3) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$.

2. 次の (1), (2) の不定積分を部分積分法を用いて求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\,dx$. 但し, $a \neq 0$.

(2) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$. 但し, $a > 0$.

3. $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

とおくと, I_n は漸化式

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

をみたすことが分かる. このことと

$$I_0 = \frac{\pi}{2},\ I_1 = 1$$

を用いて,

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & (n \text{ は偶数}), \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n \text{ は奇数}) \end{cases}$$

を示せ. 但し, $n!!$ は問題 7 においても現れた n の 2 重階乗である.

問題 10 の解答

1. (1) 変数変換

$$t = \sqrt{x+1}$$

を行うと,

$$x = t^2 - 1,\ dx = 2tdt.$$

よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} &= \int \frac{2tdt}{(t^2-1)t} \\ &= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \\ &= \log\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|.\end{aligned}$$

(2) 変数変換

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$$

を行うと,

$$x = \frac{-t^2+1}{t^2+1},\ dx = \frac{-4t}{(t^2+1)^2}dt,\ \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{t^2+1}.$$

よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{1}{\dfrac{-t^2+1}{t^2+1}\dfrac{2t}{t^2+1}} \frac{-4t}{(t^2+1)^2}dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \\ &= \log\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|.\end{aligned}$$

(3) 変数変換

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

を行うと,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

よって,

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx &= \int \frac{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \int \left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right) dt \\ &= t + \log(1+t^2)\end{aligned}$$

$$= \tan\frac{x}{2} + \log\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right).$$

2. (1) 求める不定積分を I とおくと, 部分積分法より,

$$\begin{aligned}
I &= \int x'\sqrt{x^2+a}dx \\
&= x\sqrt{x^2+a} - \int x\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}dx \\
&= x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}}dx \\
&= x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}dx + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} \\
&= x\sqrt{x^2+a} - I + a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|.
\end{aligned}$$

よって,

$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right).$$

(2) 求める不定積分を I とおくと, 部分積分法より,

$$\begin{aligned}
I &= \int x'\sqrt{a^2-x^2}dx \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} + \int x\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \sqrt{a^2-x^2}dx \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a} - I.
\end{aligned}$$

よって,

$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right).$$

3. n が偶数のとき,

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{n-1}{n}I_{n-2} \\
&= \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}I_{n-4} \\
&= \cdots \\
&= \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0 \\
&= \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

n が奇数のとき,

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1 \\
&= \frac{(n-1)!!}{n!!}.
\end{aligned}$$