§11. 長さと面積

積分の応用として, 平面上の曲線の長さや曲線で囲まれた領域の面積を計算することができる. まず, 曲線の長さについて考えよう. 問題 6 においても触れたように, xy 平面上の曲線は区間 I で定義された関数 $\varphi(t), \psi(t)$ を用いて,

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \quad (t \in I)$$

と表される. 線分の長さは端点の座標さえ分かれば, 三平方の定理を用いて計算することができるが, このような曲線の長さはどのように考えればよいのだろうか? まず, 曲線を折れ線で近似することから始めよう. それには曲線上の点をいくつか選んで結べばよい. 折れ線の長さは線分の長さの和として計算できるが, 選ぶ点をどんどん増やしていき, 折れ線の長さがある値に収束するとき, その値を曲線の長さとよぶ. 曲線を表す関数が有界閉区間で C^1 級ならば, 曲線の長さは存在する.

定理　$\varphi(t), \psi(t)$ を閉区間 $[a, b]$ で C^1 級の関数とすると, 曲線

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \quad (t \in [a, b])$$

の長さは

$$\int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.$$

特に, 閉区間 $[a, b]$ で C^1 級の関数 $f(x)$ のグラフとして表される曲線の長さは

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

例　$a > 0$ とすると, 原点中心, 半径 a の円は

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t \quad (t \in [0, 2\pi])$$

と表されるから, 長さは

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}\,dt &= \int_0^{2\pi} a\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} a\,dt \\ &= 2\pi a.\end{aligned}$$

例 (星芒形またはアステロイド)
$a > 0$ とし, 曲線

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t \quad (t \in [0, 2\pi])$$

を考える. この曲線は星芒形またはアステロイドとよばれる. 長さは $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ の部分の長さを 4 倍して,

$$\begin{aligned}4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\{3a(\cos^2 t)(-\sin t)\}^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt &= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t}\,dt \\ &= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\,dt \\ &= 12a\left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 6a.\end{aligned}$$

平面上の曲線は極座標とよばれるものを用いて表される場合がある. O を xy 平面の原点, P を xy 座標が (x, y) の点とし, 線分 OP の長さを r とおく. このとき, 三平方の定理より,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

である. 次に, x 軸とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とのなす角を θ とおく. θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲に選んでおくことが多い. このとき,

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

が成り立つ. (r, θ) が極座標である. なお, よく用いられる座標 (x, y) は Descartes 座標または直交座標とよばれる.

定理　$f(\theta)$ を閉区間 $[\alpha, \beta]$ で C^1 級の関数とすると, 極座標を用いて

$$r = f(\theta) \quad (\theta \in [\alpha, \beta])$$

と表される曲線の長さは

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}d\theta.$$

証明　上の曲線は直交座標を用いると,

$$x = f(\theta)\cos\theta,\ y = f(\theta)\sin\theta \quad (\theta \in [\alpha, \beta])$$

と表される.
ここで,

$$x'(\theta) = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta,\ y'(\theta) = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta$$

だから,

$$(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = (f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2.$$

よって, 上の定理を用いればよい. □

例 (心臓形またはカージオイド)
$a > 0$ とし, 極座標を用いて表される曲線

$$r = a(1 + \cos\theta) \quad (\theta \in [0, 2\pi])$$

を考える. この曲線は心臓形またはカージオイドとよばれる. 長さは上の定理を用いて, $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分の長さを 2 倍して,

$$\begin{aligned} 2\int_0^\pi \sqrt{\{a(1+\cos\theta)\}^2 + (-a\sin\theta)^2}d\theta &= 2\int_0^\pi \sqrt{2a^2(1+\cos\theta)}d\theta \\ &= 4a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}d\theta \\ &= 4a\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi \\ &= 8a. \end{aligned}$$

次に, 曲線で囲まれた領域の面積について考えよう. $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ をみたす積分可能な関数とし, D を曲線 $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた領域とする. D は

$$\{(x, y) | a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

と表される. 定積分の意味より, D の面積は

$$\int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))dx.$$

例　$a > 0$ とすると, 原点中心, 半径 a の円で囲まれた領域は

$$\{(x, y) | -a \leq x \leq a,\ -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}$$

と表されるから, 面積は

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2 - x^2}dx &= \left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right]_{-a}^{a} \\ &= \pi a^2. \end{aligned}$$

なお, 上の定積分の値は第 1 象限の部分の面積を 4 倍して, 更に変数変換 $x = a \sin t$ を行い, 置換積分を用いて,

$$\begin{aligned} 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos t)(a \cos t)dt \\ &= \cdots \end{aligned}$$

と計算することもできる.

例　上の例に現れたアステロイドで囲まれた領域の面積は, 第 1 象限の部分の面積を 4 倍して, 置換積分法を用いると,

$$\begin{aligned} 4\int_0^a y dx &= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y \frac{dx}{dt} dt \\ &= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (a \sin^3 t)(3a \cos^2 t)(-\sin t)dt \\ &= 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt \\ &= 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t)(1 - \sin^2 t)dt \\ &= 12a^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt \right) \\ &= 12a^2 \left(\frac{3}{4 \cdot 2} - \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4 \cdot 2} \right) \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{3}{8}\pi a^2. \end{aligned}$$

なお, 上の計算では問題 10 において扱った定積分に関する等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \dfrac{\pi}{2} & (n \text{ は偶数}), \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n \text{ は奇数}) \end{cases}$$

を用いた.

問題 11

1. $a > 0$ とし, アステロイドの一部

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t \quad \left(t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

を考える.

(1) $t_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ とする. この曲線の $x = a\cos^3 t_0$ における接線の方程式を求めよ.

(2) (1) の接線が x 軸および y 軸と交わる点をそれぞれ A, B とする. 線分 AB の長さを求めよ.

2. $a > 0$ とし, 曲線

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

を考える. この曲線は擺線またはサイクロイドとよばれる.

(1) この曲線の長さを求めよ.

(2) この曲線と x 軸で囲まれた領域の面積を求めよ.

3. $a, b > 0$ とし, 曲線

$$y = a\cosh\frac{x}{a} \quad (0 \leq x \leq b)$$

を考える. この曲線は懸垂線またはカテナリーとよばれる.

(1) この曲線の長さを求めよ.

(2) この曲線と直線 $x = 0$, $x = b$ および x 軸で囲まれた領域の面積を求めよ.

4. $a, b > 0$ とし, 極座標を用いて表される曲線

$$r = a\theta \quad (\theta \in [0, b])$$

を考える. この曲線は Archimedes の螺旋とよばれる. この曲線の長さを求めよ.

5. $a, c > 0$, $b \neq 0$ とし, 極座標を用いて表される曲線

$$r = ae^{b\theta} \quad (\theta \in [0, c])$$

を考える. この曲線は Bernoulli の螺旋, 対数螺旋または等角螺旋とよばれる.

(1) この曲線の長さを求めよ.

(2) a, b を固定しておき, この曲線の長さを c の関数と考えて $L(c)$ とおく. 極限 $\lim_{c \to +\infty} L(c)$ を求めよ.

問題 11 の解答

1. (1) まず,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a(\cos^2 t)(-\sin t)} = -\tan t.$$

よって, 求める接線の方程式は

$$y = a\sin^3 t_0 - (\tan t_0)(x - a\cos^3 t_0).$$

即ち,

$$y = -(\tan t_0)x + a\sin t_0. \quad (*)$$

(2) $(*)$ に $y=0$ を代入すると,

$$x = a\cos t_0$$

だから, A の座標は $(a\cos t_0, 0)$.
$(*)$ に $x=0$ を代入すると,

$$y = a\sin t_0$$

だから, B の座標は $(0, a\sin t_0)$.
よって, 線分 AB の長さは

$$\sqrt{(a\cos t_0)^2 + (a\sin t_0)^2} = a.$$

2. (1) 求める曲線の長さは

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sqrt{\{a(1-\cos t)\}^2 + (a\sin t)^2}dt &= a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}dt \\ &= 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt \\ &= 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= 2a(2+2) \\ &= 8a.\end{aligned}$$

(2) 求める領域の面積は

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi a} y dx &= \int_0^{2\pi} y\frac{dx}{dt}dt \\ &= \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt \\ &= a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt \\ &= a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt \\ &= a^2\left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}\end{aligned}$$

$$= 3\pi a^2.$$

3. (1) 求める曲線の長さは

$$\begin{aligned}\int_0^b \sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}dx &= \int_0^b \sqrt{\cosh^2\frac{x}{a}}dx \\ &= \int_0^b \cosh\frac{x}{a}dx \\ &= \left[a\sinh\frac{x}{a}\right]_0^b \\ &= a\sinh\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

(2) 求める領域の面積は

$$\begin{aligned}\int_0^b a\cosh\frac{x}{a}dx &= \left[a^2\sinh\frac{x}{a}\right]_0^b \\ &= a^2\sinh\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

4. 求める曲線の長さは

$$\begin{aligned}\int_0^b \sqrt{a^2\theta^2+a^2}d\theta &= a\int_0^b \sqrt{\theta^2+1}d\theta \\ &= a\left[\frac{1}{2}\left(\theta\sqrt{\theta^2+1}+\log\left|\theta+\sqrt{\theta^2+1}\right|\right)\right]_0^b \\ &= \frac{a}{2}\left\{b\sqrt{b^2+1}+\log\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)\right\}.\end{aligned}$$

5. (1) 求める曲線の長さは

$$\begin{aligned}\int_0^c \sqrt{a^2e^{2b\theta}+(abe^{b\theta})^2}d\theta &= a\sqrt{1+b^2}\int_0^c e^{b\theta}d\theta \\ &= a\sqrt{1+b^2}\left[\frac{1}{b}e^{b\theta}\right]_0^c \\ &= \frac{a\sqrt{1+b^2}}{b}(e^{bc}-1).\end{aligned}$$

(2) 求める極限は

$$\begin{aligned}\lim_{c\to+\infty} L(c) &= \lim_{c\to+\infty}\frac{a\sqrt{1+b^2}}{b}(e^{bc}-1) \\ &= \begin{cases} +\infty & (b>0), \\ -\dfrac{a\sqrt{1+b^2}}{b} & (b<0).\end{cases}\end{aligned}$$