§12. 広義積分

ここまでは定積分を有界閉区間で積分可能な関数に対して考えてきたが, その他の区間で定義された関数に対しても広義積分とよばれるものを考えることができる. 広義積分は通常の定積分と関数の極限を組み合わせることで定義される

まず, $a \in \mathbf{R}$ とし, $f(x)$ を区間 $[a, +\infty)$ で定義された関数とする. $a < b$ をみたす任意の $b \in \mathbf{R}$ に対し $f(x)$ が有界閉区間 $[a, b]$ で積分可能で, 極限

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

が収束するとき, これを

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

と書き, $f(x)$ は $[a, +\infty)$ で広義積分可能であるという.

その他の区間についても同様である. 例えば, $a < b$ とし, $f(x)$ が区間 $[a, b)$ で定義されているときは極限

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

を考え, 広義積分可能なときは上の極限を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書き, $f(x)$ が $\mathbf{R}$ で定義されているときは二つの極限を独立に考え,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)dx$$

とするのである.

また, 関数が定義されている区間を分割して広義積分可能になる場合は, 分割した区間毎に考える. 例えば, $f(x)$ が開区間 (a, c) および (c, b) で広義積分可能な場合は

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

と計算すればよい.

例　区間 $[0, +\infty)$ で定義された関数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ の広義積分は

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left[\tan^{-1} x\right]_0^b \\
&= \lim_{b \to +\infty} (\tan^{-1} b - \tan^{-1} 0) \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

広義積分においては

$$\lim_{b \to +\infty} [F(x)]_a^b = [F(x)]_a^{+\infty}$$

等と書く.

例 $\alpha \in \mathbf{R}$ とすると,

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha dx = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_1^{+\infty} & (\alpha \neq -1), \\ [\log x]_1^{+\infty} & (\alpha = -1) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha+1} & (\alpha < -1), \\ +\infty & (\alpha \geq -1). \end{cases}$$

関数が広義積分可能であるかどうかは次の定理を用いて調べることができる.

定理 $f(x), g(x)$ を区間 $[a,b)$ で定義された関数とする.
$[a,b)$ 上で

$$|f(x)| \leq g(x)$$

が成り立ち, $g(x)$ が $[a,b)$ で広義積分可能ならば, $f(x)$ は $[a,b)$ で広義積分可能.
$[a,b)$ 上で

$$0 \leq g(x) \leq f(x)$$

が成り立ち, $g(x)$ が $[a,b)$ で広義積分可能でないならば, $f(x)$ は $[a,b)$ で広義積分可能でない.
その他の区間の場合についても同様である.

広義積分を用いて定義される関数の中でも次の Γ 関数と B 関数の二つはとても重要である.

例 (Γ 関数)
$s > 0$ を固定しておき, x の関数

$$f(x) = e^{-x}x^{s-1}$$

を考える. 上の定理を用いると, $f(x)$ は区間 $(0, +\infty)$ で広義積分可能であることが分かる. このとき,

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$$

と書き, $\Gamma(s)$ を Γ 関数とよぶ.

次に示すように, Γ 関数は階乗の一般化とみなすことができる.

定理 次の (1), (2) が成り立つ.
(1) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.
(2) $n \in \mathbf{N}$ とすると $\Gamma(n) = (n-1)!$.

証明 (1): 部分積分法より,

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x}x^s dx \\ &= \int_0^{+\infty} (-e^{-x})' x^s dx \\ &= \left[-e^{-x}x^s\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}sx^{s-1}dx. \end{aligned}$$

ここで, 第 1 項は de l'Hospital の定理より 0 となることが分かるから,

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

(2): (1) と

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \\ &= \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} \\ &= 1\end{aligned}$$

を用いればよい. □

例 (B 関数)
$p, q > 0$ を固定しておき, x の関数

$$f(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$$

を考える. 上の定理を用いると, $f(x)$ は区間 $(0,1)$ で広義積分可能であることが分かる. このとき,

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

と書き, $B(p,q)$ を B 関数とよぶ.

B 関数についても基本的な性質を述べておこう.

定理 次の (1), (2) が成り立つ.
(1) $B(p,q) = B(q,p)$.
(2) $pB(p,q+1) = qB(p+1,q)$.

証明 (1): 変数変換 $x = 1-t$ を行うと, 置換積分法より,

$$\begin{aligned}B(p,q) &= \int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}(-dt) \\ &= \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt \\ &= B(q,p).\end{aligned}$$

(2): 部分積分法より,

$$\begin{aligned}pB(p,q+1) &= p\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx \\ &= [x^p(1-x)^q]_0^1 + q\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx \\ &= qB(p+1,q).\end{aligned}$$

□

問題 12

1. 次の (1)〜(5) の広義積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \log x dx.$

(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}}.$

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x}.$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ 但し, $n \in \mathbf{N}$.

2. Γ 関数と B 関数は基本関係式

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

をみたすことが知られている. また, B 関数は等式

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta d\theta \tag{$*$}$$

をみたす.

(1) $(*)$ を示せ.

(2) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ.

(3) $n \in \mathbf{N}$ のとき, $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ.

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ の値を求めよ. なお, この広義積分は Gauss 積分とよばれる.

問題 12 の解答

1. (1) 部分積分法より,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log x dx &= \int_0^1 x' \log x dx \\ &= [x \log x]_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{x} dx \\ &= -\int_0^1 dx \\ &= -1.\end{aligned}$$

(2) 被積分関数は $x=1$ で発散するから,

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= [\sin^{-1} x]_0^1 + \left[\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right]_1^2 \\ &= \frac{\pi}{2} + \log(2+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

(3) 変数変換 $t = \sinh x$ を行うと,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} &= \int_0^{+\infty} \frac{\cosh x}{\cosh^2 x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\cosh x}{1+\sinh^2 x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= [\tan^{-1} t]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(4) 求める値は

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \left[\frac{1}{2}\left(\sin^{-1} x\right)^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

(5) 変数変換 $x = \sin t$ を行うと,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n+1} t}{\cos t} \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt \\ &= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.\end{aligned}$$

2. (1) 変数変換 $x=\sin^2\theta$ を行うと,

$$\begin{aligned}B(p,q)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{2(p-1)}\theta)(1-\sin^2\theta)^{q-1}\cdot 2\sin\theta\cos\theta d\theta\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta.\end{aligned}$$

(2) 基本関係式において $p=q=\frac{1}{2}$ とおき, $(*)$ を用いると,

$$\begin{aligned}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2&=\Gamma(1)B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\&=1\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\\&=\pi.\end{aligned}$$

ここで, $\Gamma(s)>0$ だから,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

(3) (2) より,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)&=\Gamma\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)+1\right)\\&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\\&=\cdots\\&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{2n-1}{2}\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{2n-(2n-1)}{2}\sqrt{\pi}\\&=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

(4) 被積分関数が偶関数であることに注意して, 変数変換 $x=\sqrt{t}$ を行うと, (2) より,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx&=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\\&=2\int_0^{+\infty}e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt\\&=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{\frac{1}{2}-1}dt\\&=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\&=\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$