

微分積分学IB（藤岡敦担当）演習問題

出題日：2011年7月6日

解答は提出しなくてよい。7月19日に解説を行う。

1. 次の(1), (2)の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x - x}{x^3}.$$

2. 双曲線正弦関数 $\sinh x$ を \mathbf{R} で連続な関数と考える.

(1) \mathbf{R} で連続で単調増加な $\sinh x$ の逆関数が存在することを示せ.

(2) $\sinh x$ の逆関数を $\sinh^{-1} y$ と書く. 逆関数の微分法を用いることにより, $\sinh^{-1} x$ の導関数を求めよ. なお,

$$\sinh^{-1} x = \log \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

であることが分かる.

3. \mathbf{R} で定義された関数 $x^2 e^{-x}$ について, グラフの凹凸および極値をもつかどうかを調べよ.

4. 不定積分 $\int \frac{dx}{\sin x}$ を次の(1), (2)の方法により求めよ.

$$(1) t = \tan \frac{x}{2} \text{ とおく.}$$

$$(2) t = \cos x \text{ とおく.}$$

5. 広義積分 $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$ の値を求めよ.