§1. 多変数関数

実数全体を $\mathbf{R}$ と書く. また, 実数を n 個並べたもの全体を $\mathbf{R}^n$ と書く. 即ち,

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

である. $\mathbf{R}^1$ は $\mathbf{R}$ に他ならない. $\mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ はそれぞれ直線, 平面, 空間とよび, 幾何学的に理解することが多い. $\mathbf{R}^n$ の部分集合で定義された関数, 即ち, $\mathbf{R}^n$ の部分集合から $\mathbf{R}$ への対応を n 変数関数とよぶ. 以下では, 主に 2 変数関数を考える. それは 2 変数関数のことをよく理解していれば, 3 変数以上の場合も理解しやすく, 1 変数と 2 変数との違いの方が大きいからである. 2 変数関数は変数を x, y として, $z = f(x, y)$ または単に $f(x, y)$ と書くことにする.

例 (一次関数)
$a, b, c \in \mathbf{R}$ とし,

$$f(x, y) = ax + by + c$$

とおくと, $f(x, y)$ は $\mathbf{R}^2$ で定義された 2 変数関数を定める.

例　$a, b > 0$ とする. x, y の 2 次多項式

$$\pm\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right),\ \pm\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right),\ \pm\frac{x^2}{a^2},\ \pm\frac{y^2}{b^2}$$

はそれぞれ $\mathbf{R}^2$ で定義された 2 変数関数を定める.

1 変数関数はグラフとよばれる平面 $\mathbf{R}^2$ の部分集合と同一視することができるが, 2 変数の場合も同様である. $f(x, y)$ を $\mathbf{R}^2$ の部分集合 D で定義された 2 変数関数とする. このとき, $f(x, y)$ のグラフとは空間 $\mathbf{R}^3$ の部分集合

$$\{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D\}$$

のことである. これを

$$z = f(x, y) \quad ((x, y) \in D)$$

とも書く.
以下では, 特に混乱の恐れがないときは 2 変数関数を単に関数とよぶことにする.

例　上の二つの例に現れた関数のグラフを考えよう.
まず, グラフ

$$z = ax + by + c \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

は平面に他ならない.
次に, グラフ

$$z = \pm\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

は楕円放物面とよばれる図形である.
また, グラフ

$$z = \pm\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

は双曲放物面とよばれる図形である.
最後に, グラフ

$$z = \pm\frac{x^2}{a^2} \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

および

$$z = \pm \frac{y^2}{b^2} \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

は何れも放物柱面とよばれる図形である.
楕円放物面, 双曲放物面, 放物柱面は二次曲面とよばれる図形の例でもある.

1 変数関数の場合と同様に, 2 変数の場合にも関数の極限を考えることができる. $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ を固定しておき, $f(x, y)$ を (a, b) の近くで定義された関数とする. 但し, ここでは $f(x, y)$ は (a, b) で定義されている必要はない. 「近く」という言葉が曖昧で気持ち悪いかもしれないが, $\mathbf{R}^n$ の位相の話に深入りしたくないので, このようなことはあまり気にしないことにする.

定義 $l \in \mathbf{R}$ とする. (x, y) を (a, b) にどのように近づけても $f(x, y)$ が l に近づくとき, l を $f(x, y)$ の (a, b) における極限とよび,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = l$$

または

$$f(x, y) \to l \quad ((x, y) \to (a, b))$$

と書く.

2 変数関数の極限の定義自体は 1 変数の場合と大して違わないが, 実際に計算する場合は「どのように近づけても」という言葉に注意が必要である. 1 変数の場合は近づくのは右からか左からかの 2 通りしかないが, 2 変数の場合はありとあらゆる方向からの近づき方があるからである.
このような問題を克服するには極座標を用いるとよい場合がある. なお, よく用いられる座標 (x, y) は Descartes 座標または直交座標とよばれる.
O を平面 $\mathbf{R}^2$ の原点, $\mathrm{P}(x, y) \in \mathbf{R}^2$ とし, 線分 OP の長さを r とおく. このとき, 三平方の定理より,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

である. 次に, x 軸とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とのなす角を θ とおく. 但し, θ は $0 \le \theta < 2\pi$ の範囲に選んでおく. このとき,

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

が成り立つ. (r, θ) が極座標である.

例 $\mathbf{R}^2$ から原点を除いた集合 $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ で定義された関数

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}$$

を考える.
極座標を用いると,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{(r\cos\theta)^2 r\sin\theta}{\{\sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}\}^3} \\ &= \cos^2\theta\sin\theta. \end{aligned}$$

よって, 極限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$

は存在しない.

例　$\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で定義された関数

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

を考える.
極座標を用いると,

$$\begin{aligned} 0 &\leq |f(x,y)| \\ &= \left| \frac{(r\cos\theta)^2 r\sin\theta}{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} \right| \\ &= |r\cos^2\theta\sin\theta| \\ &\leq r \to 0 \quad ((x,y) \to (0,0)). \end{aligned}$$

はさみうちの原理より,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0.$$

即ち,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

1 変数の場合と同様に, 次が成り立つ.

命題　$f(x,y), g(x,y)$ を (a,b) の近くで定義された関数, $l, m \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l, \ \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = m$$

とする. このとき, 次の (1)〜(4) が成り立つ.
(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = l \pm m$　(複号同順).
(2) $c \in \mathbf{R}$ とすると, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} cf(x,y) = cl$.
(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = lm$.
(4) $m \neq 0$ のとき, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{l}{m}$.

関数の極限を用いて関数の連続性を定義することができる.

定義　$f(x,y)$ を (a,b) の近くで定義された関数とする. $f(x,y)$ は

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

が成り立つとき, (a,b) で連続であるという.
$f(x,y)$ を $\mathbf{R}^2$ の部分集合 D で定義された関数とする. $f(x,y)$ は任意の $(x,y) \in D$ で連続なとき, D で連続であるという.

1 変数の場合と同様に, $f(x,y), g(x,y)$ が (a,b) で連続ならば, $f(x,y) \pm g(x,y)$ も (a,b) で連続である, といった事実を上の命題を用いて示すことができる. 特に, x, y の多項式は $\mathbf{R}^2$ で定義された関数とみなして連続であることが分かる.

問題 1

1. $a, b, c \in \mathbf{R}$ とし, 平面

$$z = ax + by + c \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

を考える.

(1) この平面が原点を通るとき, a, b, c に対する条件を求めよ.

(2) この平面が 3 点 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ を通るとき, a, b, c の値を求めよ.

2. 次の関数の極限を調べよ.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$.

3. $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ で定義された関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

により定める. $y = 0$ として (x, y) が原点に近づくときの $f(x, y)$ の極限および $x = 0$ として (x, y) が原点に近づくときの $f(x, y)$ の極限を求めることにより, $f(x, y)$ の原点における極限が存在しないことを示せ.

4. $\mathbf{R}^2$ で定義された関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

により定める. $f(x, y)$ の原点における連続性を調べよ.

5. $\mathbf{R}^2$ で定義された関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + x^2 + y^3 + y^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 1 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

により定める. $f(x, y)$ は $\mathbf{R}^2$ で連続であることを示せ.

問題 1 の解答

1. (1) 平面の方程式に $(x,y,z)=(0,0,0)$ を代入すると, 求める条件は $c=0$.

(2) 平面の方程式に $(x,y,z)=(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ をそれぞれ代入すると,

$$0=a+c,\ 0=b+c,\ 1=c.$$

これを解くと,

$$a=-1,\ b=-1,\ c=1.$$

2. (1) 極座標を用いると,

$$\begin{aligned}\frac{xy}{x^2+y^2}&=\frac{(r\cos\theta)r\sin\theta}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\\&=\cos\theta\sin\theta.\end{aligned}$$

よって, 極限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

は存在しない.

(2) 極座標を用いると,

$$\begin{aligned}0&\le\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right|\\&\le\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right|\\&\le\left|\frac{(r\cos\theta)^3}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\right|+\left|\frac{(r\sin\theta)^3}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\right|\\&=|r\cos^3\theta|+|r\sin^3\theta|\\&\le r+r\to0\quad((x,y)\to(0,0)).\end{aligned}$$

はさみうちの原理より,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right|=0.$$

即ち,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}=0.$$

3. $y=0$ として (x,y) が原点に近づくときの $f(x,y)$ の極限は

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}}f(x,y)&=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}\\&=1.\end{aligned}$$

$x=0$ として (x,y) が原点に近づくときの $f(x,y)$ の極限は

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}}f(x,y)&=\lim_{y\to0}\frac{-y^2}{y^2}\\&=-1.\end{aligned}$$

よって, $f(x,y)$ の原点における極限は存在しない.

4. $x=y^2$ として (x,y) が原点に近づくときの $f(x,y)$ の極限は

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} f(x,y) &= \lim_{y\to 0}\frac{y^2\cdot y^2}{y^4+y^4}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\\ &\neq f(0,0).\end{aligned}$$

よって, $f(x,y)$ は原点で連続でない.

5. まず, $(a,b)\neq(0,0)$ のとき, 多項式 $x^4+x^2+y^3+y^2$ および x^2+y^2 は $\mathbf{R}^2$ で定義された関数とみなして連続で,

$$a^2+b^2\neq 0.$$

よって, $f(x,y)$ は (a,b) で連続.
次に, 原点における連続性を示す.
極座標を用いると,

$$\begin{aligned}0 &\leq |f(x,y)-1|\\ &= \left|\frac{x^4+y^3}{x^2+y^2}\right|\\ &\leq \left|\frac{x^4}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right|\\ &\leq \left|\frac{(r\cos\theta)^4}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\right| + \left|\frac{(r\sin\theta)^3}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\right|\\ &= |r^2\cos^4\theta| + |r\sin^3\theta|\\ &\leq r^2+r\to 0 \quad ((x,y)\to(0,0)).\end{aligned}$$

はさみうちの原理より,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)-1| = 0.$$

よって,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= 1\\ &= f(0,0).\end{aligned}$$

従って, $f(x,y)$ は原点で連続.
以上より, $f(x,y)$ は $\mathbf{R}^2$ で連続.