§2. 偏微分

偏微分とは多変数関数の一つの変数以外を定数とみなして微分することである．$z = f(x, y)$ を (a, b) の近くで定義された関数とする．$f(x, y)$ が y を定数 b とみなして a で微分可能なとき,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

と書き, これを $f(x, y)$ の (a, b) における x に関する偏微分係数とよぶ．このとき, $f(x, y)$ は (a, b) で x に関し偏微分可能であるという．上の偏微分係数は

$$f_x(a, b),\ \frac{\partial z}{\partial x}(a, b),\ z_x(a, b)$$

とも書く．

$f(x, y)$ が $\mathbf{R}^2$ の部分集合 D で定義されているとする．以下の定義では D は開集合とよばれるものとした方が無難であるが, 例によって $\mathbf{R}^n$ の位相には深入りしない．$f(x, y)$ が任意の $(a, b) \in D$ で x に関し偏微分可能なとき, x に関する偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ が定まる．このとき, $f(x, y)$ は D で x に関し偏微分可能であるという．上の偏導関数を

$$f_x(x, y),\ \frac{\partial z}{\partial x}(x, y),\ z_x(x, y),\ \frac{\partial f}{\partial x},\ f_x,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ z_x$$

とも書く．
y に関する偏微分についても同様である．
$f(x, y)$ は (a, b) で x に関しても y に関しても偏微分可能なとき, 単に (a, b) で偏微分可能であるという．また, D で x に関しても y に関しても偏微分可能なとき, 単に D で偏微分可能であるという．
以下ではそれほど必要がない場合は, 関数がどこで定義されているかをはっきり断らず, 定義できるところで, 偏微分するときは偏微分できるところで定義されていると大らかに受け止めることとする．

例　関数

$$f(x, y) = x^2y^3 + 4x - 5y + 6$$

を考えると,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3 + 4.$$

また,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 - 5.$$

例　関数

$$f(x, y) = \sin x + \cos(2x + 3y)$$

を考えると,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos x - 2\sin(2x + 3y).$$

また,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3\sin(2x + 3y).$$

例　関数

$$f(x,y)=e^x-2\log(3x-4y)$$

を考えると,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^x-\frac{6}{3x-4y}.$$

また,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{8}{3x-4y}.$$

$\sin x$ の逆関数を $\sin^{-1} x$ と書く.
$\sin^{-1} x$ は閉区間 $[-1,1]$ で定義されるが, 値は閉区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ にとるものとする.
$-1<x<1$ のとき, $\sin^{-1} x$ は微分可能で,

$$(\sin^{-1} x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

となる.

例　関数

$$f(x,y)=\sin^{-1} xy^2$$

を考えると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\frac{1}{\sqrt{1-(xy^2)^2}}y^2\\&=\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^4}}.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=\frac{1}{\sqrt{1-(xy^2)^2}}\cdot 2xy\\&=\frac{2xy}{\sqrt{1-x^2y^4}}.\end{aligned}$$

例　関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)),\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

を考える.
$(x,y)\neq(0,0)$ のとき, $f(x,y)$ の偏微分の計算は $f(x,y)$ の定義式の右辺の上の式のみを用いればよい. 即ち,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\frac{2xy(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\\&=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

また,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

$f(x,y)$ の $(0,0)$ における偏微分係数は偏微分の定義に戻って計算する必要がある. 即ち,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}$$
$$= 0.$$

また,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}$$
$$= \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}$$
$$= 0.$$

特に, $\mathbf{R}^2$ で定義された偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ は $(0,0)$ で連続でないことが分かる.

1 変数関数 $y = f(x)$ はグラフと同一視して a における接線の方程式

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

を考えることができた. 同様に, 2 変数関数 $z = f(x,y)$ の (a,b) における接平面の方程式は

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

であたえられる. 接線の場合と同様に, (a,b) における接平面は $(a,b,f(a,b))$ を通る平面達の中で $f(x,y)$ のグラフを $(a,b,f(a,b))$ の近くで最も良く近似するものである.

例　$a,b,c,d,e,f \in \mathbf{R}$ とし, 関数

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

の原点における接平面の方程式を求めよう.
まず,

$$z(0,0) = f.$$

また,

$$z_x(x,y) = 2ax + 2by + d$$

だから,

$$z_x(0,0) = d.$$

同様に,

$$z_y(0,0) = e.$$

よって, 求める接平面の方程式は

$$z = f + dx + ey.$$

これは始めにあたえられた関数の 1 次以下の項を取り出したものに他ならない.

問題 2

1. $a > 0,\ a \neq 1$ とする. 関数

$$f(x, y) = a^{\sin x \cos y}$$

の x および y に関する偏導関数を求めよ.

2. $\cos x$ の逆関数を $\cos^{-1} x$ と書く.
$\cos^{-1} x$ は閉区間 $[-1, 1]$ で定義されるが, 値は閉区間 $[0, \pi]$ にとるものとする.
$-1 < x < 1$ のとき, $\cos^{-1} x$ は微分可能で,

$$(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

となる.
関数

$$f(x, y) = \cos^{-1}(x - 2y)$$

の x および y に関する偏導関数を求めよ.

3. $\tan x$ の逆関数を $\tan^{-1} x$ と書く.
$\tan^{-1} x$ は $\mathbf{R}$ で定義されるが, 値は開区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ にとるものとする.
$\tan^{-1} x$ は $\mathbf{R}$ で微分可能で,

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

となる.
関数

$$f(x, y) = \tan^{-1} \sin x^4 y$$

の x および y に関する偏導関数を求めよ.

4. 双曲線関数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

は $\mathbf{R}$ で微分可能で,

$$(\sinh x)' = \cosh x,\ (\cosh x)' = \sinh x,\ (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

となる.
関数

$$f(x, y) = \sinh x \cosh^2 y + \tan^{-1} \tanh x + \tanh \tan^{-1} y$$

の x および y に関する偏導関数を求めよ.

5. 関数

$$z = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 7}$$

の $(1, 2)$ における接平面の方程式を求めよ.

問題 2 の解答

1. まず,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (\log a)a^{\sin x \cos y} \cos x \cos y.$$

また,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= (\log a)a^{\sin x \cos y}(\sin x)(-\sin y)\\ &= -(\log a)a^{\sin x \cos y} \sin x \sin y.\end{aligned}$$

2. まず,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{1-(x-2y)^2}}.$$

また,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{1-(x-2y)^2}}.$$

3. まず,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{1+\sin^2 x^4y}\left(\cos x^4y\right)\cdot 4x^3y\\ &= \frac{4x^3y\cos x^4y}{1+\sin^2 x^4y}.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{1+\sin^2 x^4y}\left(\cos x^4y\right)x^4\\ &= \frac{x^4\cos x^4y}{1+\sin^2 x^4y}.\end{aligned}$$

4. まず,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \cosh x\cosh^2 y + \frac{1}{1+\tanh^2 x}\frac{1}{\cosh^2 x}\\ &= \cosh x\cosh^2 y + \frac{1}{\cosh^2 x+\sinh^2 x}.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2\sinh x\cosh y\sinh y + \frac{1}{\cosh^2\tan^{-1} y}\frac{1}{1+y^2}\\ &= 2\sinh x\cosh y\sinh y + \frac{1}{(1+y^2)\cosh^2\tan^{-1} y}.\end{aligned}$$

5. まず,

$$z(1,2) = 4.$$

また,

$$\begin{aligned}z_x(x,y) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+2y^2+7}}\cdot 2x\\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+2y^2+7}}\end{aligned}$$

だから,

$$z_x(1,2) = \frac{1}{4}.$$

更に,

$$\begin{aligned} z_y(x,y) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+2y^2+7}} \cdot 4y \\ &= \frac{2y}{\sqrt{x^2+2y^2+7}} \end{aligned}$$

だから,

$$z_y(1,2) = 1.$$

よって, 求める接平面の方程式は

$$z = 4 + \frac{1}{4}(x-1) + 1 \cdot (y-2).$$

即ち,

$$z = \frac{1}{4}x + y + \frac{7}{4}.$$