§3. 合成関数の微分

関数の微分には偏微分と全微分の二種類が考えられる．１変数の場合にはこれらの微分可能性は一致するが, 2 変数以上の場合には一般には異なるものである．

定義 $f(x,y)$ を (a,b) の近くで定義された関数とする．ある $m, n \in \mathbf{R}$ が存在し, (a,b) の近くで

$$f(x,y) = f(a,b) + m(x-a) + n(y-b) + r(x,y)$$

と表したとき,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{r(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0$$

が成り立つとき, $f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能であるという．

上の式は Landau の記号 o を用いると,

$$f(x,y) = f(a,b) + m(x-a) + n(y-b) + o(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}) \quad ((x,y)\to(a,b)),$$

更に $x = a+h$, $y = b+k$ とおくと,

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + mh + nk + o(\sqrt{h^2+k^2}) \quad ((h,k)\to(0,0)) \qquad (*)$$

と表される．
偏微分の場合と同様に, $f(x,y)$ が $\mathbf{R}^2$ の部分集合 D で定義され, 任意の $(x,y) \in D$ で全微分可能なとき, $f(x,y)$ は D で全微分可能であるという．
まず, 全微分可能性は連続性を導くことに注意しておこう．即ち, 次が成り立つ．

定理 $f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能ならば, (a,b) で連続．

証明 $f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能であると仮定する．
$(*)$ より,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(a,b)}(f(x,y)-f(a,b)) &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}(mh+nk+o(\sqrt{h^2+k^2})) \\ &= 0.\end{aligned}$$

即ち,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

よって, $f(x,y)$ は (a,b) で連続． □

次の反例が示すように, 上の定理の仮定を「偏微分可能」に置き換えることはできない．

例 関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} & ((x,y)\neq(0,0)), \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

を考える．
容易に分かるように, $f(x,y)$ は原点で偏微分可能で,

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

しかし, §1 の例で考えたように, 極限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

は存在しないから, $f(x,y)$ は原点で連続でない.
特に, 上の定理の対偶より, $f(x,y)$ は原点で全微分可能でない.

また, 全微分可能性は偏微分可能性よりも強い概念である. 実際, 次が成り立つ.

定理　$f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能ならば, (a,b) で偏微分可能で, 上の定義に現れた m,n は

$$m = f_x(a,b),\ n = f_y(a,b)$$

によりあたえられる.

証明　$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能であると仮定する.
$(*)$ は $k=0$, $h\to 0$ としても成り立つから,

$$f(a+h,b) = f(a,b) + mh + o(|h|) \quad (h\to 0).$$

よって,

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} - \frac{o(|h|)}{h} \\ &\to f_x(a,b) \quad (h\to 0). \end{aligned}$$

従って, $f(x,y)$ は (a,b) で x に関し偏微分可能で,

$$m = f_x(a,b).$$

y に関する偏微分についても同様である. □

例　§2 の例で考えた関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)), \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

は原点で偏微分可能であった. また, §1 の例で考えたことから分かるように, $f(x,y)$ は原点で連続でもある. では, 全微分可能性についてはどうだろうか? 実は, $f(x,y)$ は原点で全微分可能でないことが分かる.

全微分可能性は後に述べる合成関数の微分法で必要とされる重要な概念ではあるが, 偏微分よりも定義が複雑で使いこなすのは困難かもしれない. しかしながら, 次の定理から分かるように, 実際の計算では考える関数は全微分可能となることが多いので, それほど神経質になる必要はない.

定理　$f(x,y)$ を (a,b) の近くで偏微分可能な関数とする. $f_x(x,y)$ または $f_y(x,y)$ が (a,b) で連続ならば, $f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能.

関数 $z=f(x,y)$, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ に対し $f(x,y)$ が $(\varphi(t),\psi(t))$ で定義されているとき, 合成関数 $z=f(\varphi(t),\psi(t))$ を考えることができる. 以下では, 合成関数を考えるときはこのような条件はみたされているとする.

合成関数の微分法　$z = f(x, y)$ を全微分可能な関数とする．このとき, 次の (1), (2) が成り立つ．
(1) 関数 $x = \varphi(t)$ および $y = \psi(t)$ が微分可能ならば, 合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ は微分可能で,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

(2) 関数 $x = \varphi(u, v)$ および $y = \psi(u, v)$ が偏微分可能ならば, 合成関数 $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ は偏微分可能で,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

注意　上の定理の (2) は行列を用いると,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

と表される．右辺に現れた 2 次行列の行列式を $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ と書く．即ち,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

これは x, y の u, v に関する Jacobi 行列式または Jacobian とよばれ, 重積分において変数変換を考える際に必要となる重要なものである．特に重要なアファイン変換と極座標変換の場合に Jacobian を計算してみよう．

例 (アファイン変換)
$a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$ とし,

$$x = au + bv + e,\ y = cu + dv + f$$

とおく．
$ad - bc \neq 0$ のとき, これはアファイン変換とよばれる変数変換を定める．また, $ad - bc \neq 0$, $e = f = 0$ のときは線形代数でも扱われる線形変換である．
x, y の u, v に関する Jacobian は

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = ad - bc.$$

例 (極座標変換)
$r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ とすると, 極座標

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

を用いて変数変換を考えることができる．
x, y の r, θ に関する Jacobian は

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r} \\ &= (\cos\theta) r\cos\theta - (-r\sin\theta)\sin\theta \\ &= r.\end{aligned}$$

問題 3

1. 極限

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k}{(\sqrt{h^2+k^2})^3}$$

が存在しないことを用いて, 関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)), \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

が原点で全微分可能でないことを示せ.

2. $\mathbf{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0), \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

により定める.
(1) $f_x(x,y)$ を求めよ.
(2) $f(x,y)$ は原点で全微分可能であることを示せ.

3. 関数 $z=f(x,y)$ と極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ の合成関数を考える. 次の (1)〜(3) が成り立つことを示せ.

(1) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=r\dfrac{\partial z}{\partial r}$.

(2) $x\dfrac{\partial z}{\partial y}-y\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$.

(3) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$.

4. $\theta\in\mathbf{R}$ とし, 関数

$$z=f(x,y),\ x=u\cos\theta-v\sin\theta,\ y=u\sin\theta+v\cos\theta$$

に対し合成関数を考える. このとき,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

が成り立つこと示せ.

5. 関数 $x(r,t), y(r,t)$ を

$$x(r,t)=r\cosh t,\ y(r,t)=r\sinh t$$

により定める. x,y の r,t に関する Jacobian を求めよ.

6. 関数 $x(u,v), y(u,v)$ を

$$x(u,v)=\frac{\sin u}{\cos v},\ y(u,v)=\frac{\sin v}{\cos u}$$

により定める. x,y の u,v に関する Jacobian を x,y の式で表せ.

問題 3 の解答

1. 背理法により示す.

$f(x,y)$ が原点で全微分可能であると仮定すると,

$$f(0+h,0+k)=f(0,0)+f_x(0,0)h+f_y(0,0)k+o(\sqrt{h^2+k^2})\quad((h,k)\to(0,0)).$$

ここで,

$$f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$$

だから,

$$\frac{h^2k}{h^2+k^2}=o(\sqrt{h^2+k^2})\quad((h,k)\to(0,0)).$$

一方, 極限

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\dfrac{h^2k}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2k}{(\sqrt{h^2+k^2})^3}$$

は存在しないから, 矛盾である.

よって, $f(x,y)$ は原点で全微分可能でない.

2. (1) $x\neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}f_x(x,y)&=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\&=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

また,

$$f_x(0,0)=0.$$

(2) $f_y(x,y)=0$ だから, $f_y(x,y)$ は原点で連続.

よって, $f(x,y)$ は原点で全微分可能.

3. まず,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r}&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\&=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}r\frac{\partial z}{\partial r}&=\frac{\partial z}{\partial x}r\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}r\sin\theta\\&=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}.\end{aligned}$$

従って, (1) が成り立つ.

次に,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial\theta}&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}\\&=-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta\\&=x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}.\end{aligned}$$

よって, (2) が成り立つ.
更に,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta\right)^2\\&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.\end{aligned}$$

よって, (3) が成り立つ.

4. まず,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u}&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\&=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v}&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\\&=-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\right)^2\\&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.\end{aligned}$$

5. 求める Jacobian は

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)}&=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial r}\\&=(\cosh t)r\cosh t-r\sinh t\sinh t\\&=r(\cosh^2 t-\sinh^2 t)\\&=r\quad(\because \cosh^2 t-\sinh^2 t=1).\end{aligned}$$

6. 求める Jacobian は

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}&=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\\&=\frac{\cos u}{\cos v}\frac{\cos v}{\cos u}-\frac{\sin u\sin v}{\cos^2 v}\frac{\sin v\sin u}{\cos^2 u}\\&=1-\frac{\sin^2 u\sin^2 v}{\cos^2 u\cos^2 v}\\&=1-x^2y^2.\end{aligned}$$