§4. Taylor の定理

1 変数の場合と同様に, 高次の偏導関数を考えることができる. 例えば,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{xy},\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}$$

等と書く.
2 変数関数の第 n 次偏導関数は 2^n 通り考えることができる. 例えば, $f(x,y)$ の第 2 次偏導関数は

$$f_{xx},\ f_{xy},\ f_{yx},\ f_{yy}$$

の 4 通りである.

例　関数

$$f(x,y)=x^2y$$

を考えると,

$$f_x(x,y)=2xy,\ f_y(x,y)=x^2.$$

よって,

$$f_{xx}(x,y)=2y,\ f_{xy}(x,y)=2x,\ f_{yx}(x,y)=2x,\ f_{yy}(x,y)=0.$$

上の例において,

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$$

が成り立っていることに注意しよう. 実は, 次が成り立つのである.

定理　$f(x,y)$ を (a,b) の近くで定義された関数とする. 第 2 次偏導関数 $f_{xy}(x,y)$ および $f_{yx}(x,y)$ が存在し, これらが (a,b) で連続ならば,

$$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b).$$

1 変数の場合と同様に, C^n 級の関数を考えることができる. 関数 $f(x,y)$ は第 n 次までの偏導関数がすべて存在し, それらが連続であるとき, n 回連続微分可能または C^n 級であるという. 任意の n に対し C^n 級であるときは無限回連続微分可能または C^∞ 級であるという. 実際の計算では扱う関数は大抵 C^∞ 級であるため, 上の定理より, 偏微分の順序はどのように選んでもよいことが多い.
例えば, $f(x,y)$ が C^3 級ならば,

$$f_{yxx}(x,y)=f_{xyx}(x,y)=f_{xxy}(x,y)$$

が成り立つが, これらは

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}$$

と書く.
簡単のため, $z=f(x,y)$ を (a,b) の近くで定義された C^∞ 級関数とし, $h,k\in\mathbf{R}$ を固定しておき, 1 変数関数

$$F(t)=f(a+ht,b+kt)$$

を考える.

合成関数の微分法より,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= f_x(a+ht, b+kt)h + f_y(a+ht, b+kt)k \\ &= hf_x(a+ht, b+kt) + kf_y(a+ht, b+kt). \end{aligned}$$

再び合成関数の微分法を用いると,

$$\begin{aligned} F''(t) &= (F'(t))' \\ &= \frac{d}{dt}\left(hf_x(a+ht, b+kt) + kf_y(a+ht, b+kt)\right) \\ &= \left(hf_{xx}(a+ht, b+kt) + kf_{yx}(a+ht, b+kt)\right)h \\ &\quad + \left(hf_{xy}(a+ht, b+kt) + kf_{yy}(a+ht, b+kt)\right)k \\ &= h^2 f_{xx}(a+ht, b+kt) + 2hkf_{xy}(a+ht, b+kt) + k^2 f_{yy}(a+ht, b+kt). \end{aligned}$$

数学的帰納法を用いると,

$$F^{(n)}(t) = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r h^{n-r}k^r \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-r}\partial y^r}(a+ht, b+kt)$$

となることが分かる．但し, ${}_nC_r$ は二項係数である．これを

$$F^{(n)}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+ht, b+kt)$$

と書くことにする．

Taylor の定理　$f(x, y)$ を (a, b) を含む $\mathbf{R}^2$ の部分集合 D で定義された C^n 級の関数とし, $h, k \in \mathbf{R}$ とする．(a, b) と $(a+h, b+k)$ を結ぶ線分が D に含まれるならば, $0 < \theta < 1$ をみたす θ が存在し,

$$f(a+h, b+k) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a, b) + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h, b+\theta k)$$

と表される．

証明　上で考えた $F(t)$ に対する Maclaurin の定理を用いて, $t = 1$ とおけばよい． □

注意　1 変数の場合と同様に, Taylor の定理は $(a, b) = (0, 0)$ のときは Maclaurin の定理, $n = 1$ のときは平均値の定理ともよばれる．
実際の計算で扱う関数に対しては Taylor 展開

$$f(a+h, b+k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a, b)$$

の成り立つことが多い．これも $(a, b) = (0, 0)$ のときは Maclaurin 展開とよばれる．
§2 で扱った接平面の方程式は Taylor の定理に現れる式において, $j = 0$ と $j = 1$ の部分のみを取り出したものとなっている．

1 変数の場合と同様に, 関数 $f(x, y)$ の極大, 極小を考えることができる．(a, b) の近くで定義された関数 $f(x, y)$ に対し, (a, b) の近くで $f(a, b)$ が最大値となるとき, $f(a, b)$ を (a, b) における

$f(x,y)$ の極大値とよぶ．このとき, $f(x,y)$ は (a,b) で極大であるともいう．極小値に対しても同様である．極大値と極小値を合わせて, 単に極値とよぶ.
偏微分可能な関数の極値をあたえる点の候補は次の定理を用いて求めることができる．証明は 1 変数の場合に帰着させればよい.

定理　関数 $f(x,y)$ が (a,b) で偏微分可能であるとする．$f(a,b)$ が (a,b) における $f(x,y)$ の極値ならば,

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0.$$

更に, 関数が C^2 級の場合, 上の定理で求めた候補が実際に極値をあたえるかどうかを判定するには, 次の定理を用いればよい．証明には Taylor の定理が用いられる.

定理　$f(x,y)$ を (a,b) の近くで定義された C^2 級の関数,

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$

とし,

$$H = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2$$

とおく．$H > 0$ かつ $f_{xx}(a,b) > 0$ ならば, $f(x,y)$ は (a,b) で極小, $H > 0$ かつ $f_{xx}(a,b) < 0$ ならば, $f(x,y)$ は (a,b) で極大, $H < 0$ ならば, $f(x,y)$ は (a,b) で極値をとらない.

上の定理における H を Hesse 行列式また Hessian とよぶ．また, 上の定理において, $H > 0$ のときは $f_{xx}(a,b)$ と $f_{yy}(a,b)$ の符号は一致する．更に, $H = 0$ の場合は上の定理で極値の判定を行うことはできないため, 個別に考える必要がある.

例　関数

$$f(x,y) = x^2 + x^2y + y^2$$

を考えると,

$$f_x(x,y) = 2x + 2xy,\ \ f_y(x,y) = x^2 + 2y.$$

よって,

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$$

とすると,

$$(x,y) = (0,0), (\pm\sqrt{2}, -1).$$

ここで,

$$f_{xx}(x,y) = 2 + 2y,\ \ f_{xy}(x,y) = 2x,\ \ f_{yy}(x,y) = 2.$$

$(0,0)$ における Hessian は

$$(2 + 2\cdot 0)\cdot 2 - (2\cdot 0)^2 = 4 > 0.$$

また,

$$f_{xx}(0,0) = 2 > 0.$$

従って, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値 $f(0,0) = 0$ をとる.
$(\sqrt{2}, -1)$ における Hessian は

$$\{2 + 2\cdot(-1)\}\cdot 2 - (2\sqrt{2})^2 = -8 < 0.$$

従って, $f(x,y)$ は $(\sqrt{2}, -1)$ で極値をとらない.
同様に, $f(x,y)$ は $(-\sqrt{2}, -1)$ で極値をとらない.

問題 4

1. C^2 級関数 $f(x,y)$ に対し連続関数 Δf を

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

により定める. Δ は Laplacian とよばれる偏微分作用素として知られ, $\Delta f = 0$ をみたす関数 $f(x,y)$ は調和であるという. $a,b,c,d,e \in \mathbf{R}$ とすると, 関数

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy - ay^2 + cx + dy + e$$

は調和であることを示せ.

2. 関数 $z = f(x,y)$ と極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ の合成関数を考える.

(1) 等式

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 関数

$$z = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

は調和であることを示せ.

3. 平均値の定理を用いて,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

をみたす $\mathbf{R}^2$ で定義された C^1 級関数は定数であることを示せ.

4. 次の (1), (2) の関数 $f(x,y)$ の極値を調べよ.

(1) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$.

(2) $f(x,y) = x^2y + xy^2$.

問題 4 の解答

1. まず,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax + 2by + c,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a.$$

また,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2bx - 2ay + d,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2a.$$

よって,

$$\Delta f = 0.$$

2. (1) まず,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta.$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\sin\theta\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin\theta\right)\sin\theta \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta.\end{aligned}$$

また,

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta.$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= -\left(-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r\sin\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}r\cos\theta\right)r\sin\theta - \frac{\partial z}{\partial x}r\cos\theta \\ &\quad + \left(-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}r\sin\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r\cos\theta\right)r\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial y}r\sin\theta \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r^2\sin^2\theta - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}r^2\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r^2\cos^2\theta - \frac{\partial z}{\partial x}r\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial y}r\sin\theta.\end{aligned}$$

従って,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \Delta z.$$

(2) 極座標変換を用いると,

$$z = \frac{\cos\theta}{r}.$$

よって,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = -\frac{\cos\theta}{r^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 2\frac{\cos\theta}{r^3},\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\sin\theta}{r},\ \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = -\frac{\cos\theta}{r}.$$

従って,

$$\begin{aligned}\Delta z &= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

3. $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbf{R}^2$ とする.

平均値の定理より, (x_0, y_0) と (x_1, y_1) を結ぶ線分上の点 (x_2, y_2) が存在し,

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= f(x_0, y_0) + (x_1 - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2) + (y_1 - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) \\ &= f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

よって, $f(x, y)$ は定数.

4. (1) まず,

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3y,\ f_y(x, y) = -3x + 3y^2.$$

よって,

$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$$

とすると,

$$(x, y) = (0, 0), (1, 1).$$

ここで,

$$f_{xx}(x, y) = 6x,\ f_{xy}(x, y) = -3,\ f_{yy}(x, y) = 6y.$$

$(0, 0)$ における Hessian は

$$6 \cdot 0 \cdot 6 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0.$$

従って, $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で極値をとらない.
$(1, 1)$ における Hessian は

$$6 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 - (-3)^2 = 27 > 0.$$

また,

$$f_{xx}(1, 1) = 6 > 0.$$

従って, $f(x, y)$ は $(1, 1)$ で極小値 $f(1, 1) = -1$ をとる.
(2) まず,

$$f_x(x, y) = 2xy + y^2,\ f_y(x, y) = x^2 + 2xy.$$

よって,

$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$$

とすると,

$$(x, y) = (0, 0).$$

ここで,

$$f_{xx}(x, y) = 2y,\ f_{xy}(x, y) = 2x + 2y,\ f_{yy}(x, y) = 2x$$

だから, $(0, 0)$ における Hessian は 0 となり, これだけでは極値の判定を行うことはできない.
しかし,

$$f(x, x) = 2x^3$$

だから, $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で極値をとらない.