§5. 陰関数

$f(x,y)$ を 2 変数関数とする. 1 変数関数 $y=\varphi(x)$ は

$$f(x,\varphi(x))=0$$

をみたすとき, $f(x,y)=0$ の陰関数とよぶ.
同様に, $x=\psi(y)$ という形の陰関数を考えることもできる.

陰関数の定理　$f(x,y)$ が (a,b) の近くで C^1 級で,

$$f(a,b)=0,\ f_y(a,b)\neq 0$$

ならば, $\varphi(a)=b$ をみたし a の近くで C^1 級の $f(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在し,

$$\varphi'(x)=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}.$$

証明１　連続な陰関数 $\varphi(x)$ が存在すると仮定し, $\varphi'(a)$ のみ計算する.
$h,k\in\mathbf{R}$ とし, $f(x,y)$ が (a,b) と $(a+h,b+k)$ を結ぶ線分で定義されているとする.
平均値の定理より, $0<\theta<1$ をみたす θ が存在し,

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)&=f(a,b)+hf_x(a+\theta h,b+\theta k)+kf_y(a+\theta h,b+\theta k)\\&=hf_x(a+\theta h,b+\theta k)+kf_y(a+\theta h,b+\theta k).\end{aligned}$$

ここで,

$$k=\varphi(a+h)-\varphi(a)$$

とすると, $\varphi(a)=b$ だから,

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)&=f(a+h,\varphi(a+h))\\&=0.\end{aligned}$$

また, $\varphi(x)$ は a で連続だから,

$$k\to 0\quad(h\to 0).$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}&=\frac{k}{h}\\&=-\frac{f_x(a+\theta h,b+\theta k)}{f_y(a+\theta h,b+\theta k)}\\&\to-\frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}\quad(h\to 0).\end{aligned}$$

即ち,

$$\varphi'(a)=-\frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}.$$

□

証明２　C^1 級の陰関数 $\varphi(x)$ が存在すると仮定し, $\varphi'(x)$ のみ計算する.
恒等式

$$f(x,\varphi(x))=0$$

の両辺を x で微分すると,

$$f_x(x,\varphi(x))\cdot 1+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0.$$

即ち,

$$\varphi'(x)=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}.$$

□

例　関数

$$f(x,y)=x^2+y^2-1$$

を考えると,

$$f_x(x,y)=2x,\ f_y(x,y)=2y.$$

ここで,

$$f(x,y)=f_y(x,y)=0$$

とすると,

$$(x,y)=(\pm 1,0).$$

$a\neq\pm 1$ のとき, a の近くで C^1 級の $f(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在し,

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=-\frac{2x}{2y}\\&=-\frac{x}{y}.\end{aligned}$$

もちろんこの場合は陰関数の定理を使わなくとも, 陰関数は

$$\varphi(a)=\pm\sqrt{1-a^2},\ \varphi(x)=\pm\sqrt{1-x^2}\quad(\text{複号同順})$$

と具体的に表される.

例　$f(x,y)$ を C^1 級の関数とし, $\mathbf{R}^2$ の部分集合

$$\{(x,y)|f(x,y)=0\}$$

を単に曲線 $f(x,y)=0$ とよぶことにする.
(a,b) を曲線 $f(x,y)=0$ 上の点とする. 即ち,

$$f(a,b)=0$$

が成り立っているとする.
$f_y(a,b)\neq 0$ のとき, 陰関数の定理より, $\varphi(a)=b$ をみたす $f(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在する. このとき, 曲線 $f(x,y)=0$ は (a,b) の近くで関数 $y=\varphi(x)$ のグラフとみなすことができるから, (a,b) における接線の方程式は

$$y=b-\frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}(x-a)$$

によりあたえられる.
また, $f_y(a,b)=0,\ f_x(a,b)\neq 0$ のとき, 曲線 $f(x,y)=0$ の (a,b) における接線の方程式は

$$x=a$$

によりあたえられる.
これらを合わせると, $f_x(a,b) \neq 0$ または $f_y(a,b) \neq 0$ のとき, 曲線 $f(x,y)=0$ の (a,b) における接線の方程式は

$$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)=0$$

と一つの式で表すことができる.

$f(x,y)$ を (a,b) の近くで偏微分可能な関数とする. $f(x,y)$ が

$$f(a,b)=f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$$

をみたすとき, (a,b) を $f(x,y)=0$ の特異点とよぶ.
上の例において, (a,b) が $f(x,y)=0$ の特異点のときは, 状況はより複雑になり, 更なる考察が必要となる.

例 (Descartes の正葉線または Descartes の葉形)
関数

$$f(x,y)=x^3-3xy+y^3$$

を考える. 曲線 $f(x,y)=0$ は Descartes の正葉線または Descartes の葉形とよばれる.
まず,

$$f_x(x,y)=3x^2-3y,\ f_y(x,y)=-3x+3y^2.$$

ここで,

$$f(x,y)=f_y(x,y)=0$$

とすると,

$$\begin{cases} x^3-3xy+y^3=0, \\ x=y^2 \end{cases}$$

だから,

$$y^6-3y^3+y^3=0.$$

即ち,

$$y^3(y^3-2)=0.$$

よって,

$$(x,y)=(0,0),(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2}).$$

従って, $a \neq 0, \sqrt[3]{4}$ のとき, a の近くで C^1 級の $f(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在し,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -\frac{3x^2-3y}{-3x+3y^2} \\ &= \frac{x^2-y}{x-y^2}. \end{aligned}$$

また,

$$f(x,y)=f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$$

とすると,

$$(x,y)=(0,0).$$

よって, $f(x,y)=0$ の特異点は原点.

問題 5

1. $f(x,y)$ を

$$f(a,b)=0,\ f_y(a,b)\neq 0$$

をみたす (a,b) の近くで C^2 級の関数とする.

(1) $\varphi(a)=b$ をみたし a の近くで C^2 級の $f(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在し,

$$\varphi''(x)=-\frac{f_{xx}f_y^2-2f_{xy}f_xf_y+f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 更に, $\varphi'(a)=0$ が成り立つとし,

$$D=f_{xx}(a,b)f_y(a,b)$$

とおく. $\varphi(x)$ は a で $D>0$ のとき極大で, $D<0$ のとき極小であることを示せ.

2. $a,b>0$ とし, 関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$$

により定める. このとき, 曲線 $f(x,y)=0$ は楕円

$$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

を表す. (x_0,y_0) を E 上の点とする. E の (x_0,y_0) における接線の方程式は

$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$$

によりあたえられることを示せ.

3. $P(x)$ を定数でない x の多項式とし, 関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=y^2-P(x)$$

により定める. $f(x,y)=0$ はどのようなときに特異点をもつかを調べよ.

4. 関数

$$f(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$$

を考える. 曲線 $f(x,y)=0$ は連珠形またはレムニスケートとよばれる.

(1) $f(x,y)=f_y(x,y)=0$ をみたす (x,y) を求めよ.

(2) $y=\varphi(x)$ を C^1 級の $f(x,y)=0$ の陰関数とする. $\varphi'(x)$ を x と y の式で表せ.

(3) 曲線 $f(x,y)=0$ の特異点を求めよ.

問題 5 の解答

1. (1) 陰関数の定理より, $\varphi(a)=b$ をみたし a の近くで C^1 級の $f(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在し,

$$\varphi'(x)=-\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}. \tag{$*$}$$

$f_x(x,y), f_y(x,y), \varphi(x)$ は C^1 級だから, 右辺は微分可能.
ここで,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f_x(x,\varphi(x))&=f_{xx}(x,\varphi(x))+f_{xy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)\\&=\frac{f_{xx}(x,y)f_y(x,y)-f_{xy}(x,y)f_x(x,y)}{f_y(x,y)}.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f_y(x,\varphi(x))&=f_{yx}(x,\varphi(x))+f_{yy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)\\&=\frac{f_{xy}(x,y)f_y(x,y)-f_{yy}(x,y)f_x(x,y)}{f_y(x,y)}.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\varphi''(x)&=-\frac{\left(\dfrac{d}{dx}f_x(x,\varphi(x))\right)f_y(x,\varphi(x))-f_x(x,\varphi(x))\dfrac{d}{dx}f_y(x,\varphi(x))}{(f_y(x,\varphi(x)))^2}\\&=-\frac{\dfrac{f_{xx}f_y-f_{xy}f_x}{f_y}f_y-f_x\dfrac{f_{xy}f_y-f_{yy}f_x}{f_y}}{f_y^2}\\&=-\frac{f_{xx}f_y^2-2f_{xy}f_xf_y+f_{yy}f_x^2}{f_y^3}.\end{aligned}$$

$f(x,y)$ は C^2 級だから, 最後の式は連続関数.
従って, $\varphi(x)$ は C^2 級.

(2) $\varphi'(a)=0$ だから, $(*)$ より,

$$f_x(a,b)=0.$$

(1) より,

$$\varphi''(a)=-\frac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)}.$$

よって, $D>0$ のとき $\varphi''(a)<0$ で, $D<0$ のとき $\varphi''(a)>0$.
従って, $\varphi(x)$ は a で $D>0$ のとき極大で, $D<0$ のとき極小.

2. まず,

$$f_x(x,y)=\frac{2}{a^2}x,\ \ f_y(x,y)=\frac{2}{b^2}y.$$

ここで,

$$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$$

とすると,

$$(x_0,y_0)=(0,0).$$

一方, (x_0, y_0) は E 上の点だから,

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \tag{$*$}$$

これは矛盾.
よって, $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ または $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ となり, E の (x_0, y_0) における接線の方程式は

$$\frac{2}{a^2}x_0(x - x_0) + \frac{2}{b^2}y_0(y - y_0) = 0.$$

$(*)$ を用いて整理すると,

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1.$$

3. まず,

$$f_x(x, y) = -P'(x),\ f_y(x, y) = 2y.$$

よって,

$$f(x, y) = f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$$

とすると,

$$P(x) = P'(x) = 0,\ y = 0.$$

$P(x)$ は定数でない多項式だから, $f(x, y) = 0$ が特異点をもつのは方程式 $P(x) = 0$ が重解をもつときで, この重解の一つを $x = a$ とすると, $(a, 0)$ は $f(x, y) = 0$ の特異点.

4. (1) まず,

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= 2(x^2 + y^2) \cdot 2y + 4y \\ &= 4y(x^2 + y^2 + 1). \end{aligned} \tag{$*$}$$

よって,

$$f(x, y) = f_y(x, y) = 0$$

とすると,

$$(x, y) = (0, 0), (\pm\sqrt{2}, 0).$$

(2) まず,

$$f_x(x, y) = 4x(x^2 + y^2 - 1).$$

よって, $(*)$ と合わせて,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -\frac{4x(x^2 + y^2 - 1)}{4y(x^2 + y^2 + 1)} \\ &= -\frac{x(x^2 + y^2 - 1)}{y(x^2 + y^2 + 1)}. \end{aligned}$$

(3) 求める特異点は

$$f(x, y) = f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$$

を解いて,

$$(x, y) = (0, 0).$$