§6. Lagrange の未定乗数法

二つの関数 $f(x,y), g(x,y)$ を考え, 条件 $g(x,y)=0$ の下で $f(x,y)$ の極値を考える問題を条件付き極値問題とよぶ. $f(x,y), g(x,y)$ が C^1 級の場合は, この条件付き極値問題の極値をあたえる点の候補は次の Lagrange の未定乗数法を用いて求めることができる. 証明には陰関数の定理が用いられる.

Lagrange の未定乗数法　$f(x,y), g(x,y)$ を (a,b) の近くで定義された C^1 級の関数とし, $f(x,y)$ は条件 $g(x,y)=0$ の下で (a,b) で極値をとるとする. (a,b) が $g(x,y)=0$ の特異点でないならば,

$$\begin{cases} g(a,b)=0, \\ f_x(a,b)-\lambda g_x(a,b)=0, \\ f_y(a,b)-\lambda g_y(a,b)=0 \end{cases}$$

をみたす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在する.

注意　今まで主に 2 変数関数を扱ってきたが, 3 変数関数を用いることにより, 上の三つの式を次のように書き表すことができる.
x, y, λ の関数 $F(x,y,\lambda)$ を

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

により定める. ここで新たに導入した λ は Lagrange の未定乗数とよばれる. このとき, 上の三つの式は

$$F_\lambda(a,b,\lambda)=F_x(a,b,\lambda)=F_y(a,b,\lambda)=0$$

と同値である.

Lagrange の未定乗数法を用いて求めた極値をあたえる点の候補が実際に極値をあたえるかどうかを判定するには更なる考察が必要である. 比較的容易なのは条件 $g(x,y)=0$ を曲線 $g(x,y)=0$ とみなし, これが $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合となる場合である. 有界閉集合については $\mathbf{R}^n$ の位相に関する知識を必要とするので厳密な定義は行わないが, おおざっぱに説明すると, 有界であるとは無限の彼方までは広がっていないということで, 閉集合とは境界を含むような集合ということである. 例えば, 楕円は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合である. これに対し直線, 双曲線, 放物線は閉集合ではあるが, 有界ではない. また, §5 の問題で扱ったように, 楕円は特異点をもたない. 同様に, 直線, 双曲線, 放物線も特異点をもたない.
さて, 曲線 $g(x,y)=0$ が有界閉集合の場合に話が簡単になる理由であるが, それは次が成り立つからである.

定理　$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合で定義された連続関数は最大値および最小値をもつ.

例えば, 有界閉区間で定義された連続関数は最大値および最小値をもつが, これは 1 変数の微分積分でも扱われることである.
次の二つの条件付き極値問題は幾何的な意味を考えた方が早いが, 敢えて Lagrange の未定乗数法を使ってみよう.

例　条件 $x^2+y^2=1$ の下で関数 xy の最大値および最小値を求める.
まず, 円 $x^2+y^2=1$ は特異点をもたないことに注意する.
次に,

$$F(x,y,\lambda)=xy-\lambda(x^2+y^2-1)$$

とおき,

$$F_\lambda(x,y,\lambda)=F_x(x,y,\lambda)=F_y(x,y,\lambda)=0$$

とすると,

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y-2\lambda x=0, \\ x-2\lambda y=0. \end{cases}$$

ここで, $\lambda=0$ とすると, 第2式と第3式より,

$$(x,y)=(0,0)$$

となり, 第1式に矛盾する.
よって, $\lambda\neq 0$ だから,

$$x=\frac{1}{2\lambda}y=2\lambda y.$$

更に計算すると,

$$(x,y,\lambda)=\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right)\quad(\text{複号同順}).$$

ここで, 円 $x^2+y^2=1$ は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合で, 関数 xy はこの円で連続となるから, 最大値および最小値をもつことに注意する.
上で求めた極値をあたえる点の候補における xy の値は x,y が同符号のとき $\frac{1}{2}$ で, 異符号のとき $-\frac{1}{2}$.
以上より, 条件 $x^2+y^2=1$ の下で関数 xy は $(x,y)=\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ のとき最大値 $\frac{1}{2}$, $(x,y)=\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ のとき最小値 $-\frac{1}{2}$ をとる.

例　条件 $x^2-y^2+1=0$ の下で関数 x^2+y^2 の極値を調べる.
まず, 双曲線 $x^2-y^2+1=0$ は特異点をもたないことに注意する.
次に,

$$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda(x^2-y^2+1)$$

とおき,

$$F_\lambda(x,y,\lambda)=F_x(x,y,\lambda)=F_y(x,y,\lambda)=0$$

とすると,

$$\begin{cases} x^2-y^2+1=0, \\ 2x-2\lambda x=0, \\ 2y+2\lambda y=0. \end{cases}$$

第1式と第3式より,

$$y\neq 0,\ \lambda=-1.$$

第2式と第1式より,

$$x=0,\ y=\pm 1.$$

よって, 極値をあたえる点の候補は

$$(x, y) = (0, \pm 1).$$

双曲線は有界ではないから, 上の定理を使うことはできない. しかし, $x^2 - y^2 + 1 = 0$ のとき,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x^2 + x^2 + 1 \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

だから, $(0, \pm 1)$ では最小値 1 をとる.

最後に特異点で極値があたえられる例を挙げよう.

例　条件 $x^4 = y^3$ の下で関数 y の極値を調べる.
まず,

$$g(x, y) = x^4 - y^3$$

とおき,

$$g(x, y) = g_x(x, y) = g_y(x, y) = 0$$

とすると,

$$x^4 = y^3,\ 4x^3 = 0,\ -3y^2 = 0.$$

よって,

$$(x, y) = (0, 0).$$

従って, 原点は $g(x, y) = 0$ の特異点.
次に,

$$F(x, y, \lambda) = y - \lambda(x^4 - y^3)$$

とおき,

$$F_\lambda(x, y, \lambda) = F_x(x, y, \lambda) = F_y(x, y, \lambda) = 0$$

とすると,

$$\begin{cases} x^4 = y^3, \\ -4\lambda x^3 = 0, \\ 1 + 3\lambda y^2 = 0. \end{cases}$$

第 3 式より,

$$\lambda \neq 0.$$

第 1 式と第 2 式より,

$$(x, y) = (0, 0)$$

となり, 第 3 式に矛盾する.
以上より, 極値をあたえる点の候補は特異点である原点のみである.
ここで, $x^4 = y^3$ のとき,

$$y^3 = x^4 \geq 0$$

だから,

$$y \geq 0.$$

従って, 原点では最小値 0 をとる.

問題6

1. $a > b > 0$ とする．楕円
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
上で関数 $x^2 + y^2$ の最大値および最小値をLagrangeの未定乗数法を用いて求めよ．

2. $a, b > 0$, $(l, m) \neq (0, 0)$ とする．楕円
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
上で関数 $lx + my$ の最大値および最小値をLagrangeの未定乗数法を用いて求めよ．

3. $(a, b) \neq (0, 0)$, $c \in \mathbf{R}$ とし，直線
$$l : ax + by + c = 0$$
を考える．$\mathrm{P}(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ とすると，P と l 上の点の距離の中で最小なものが存在し，これはPと l の距離とよばれる．Pと l の距離をLagrangeの未定乗数法を用いて求めよ．

問題 6 の解答

1. まず, 楕円は特異点をもたないことに注意する.
次に,

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

とおき,

$$F_\lambda(x,y,\lambda) = F_x(x,y,\lambda) = F_y(x,y,\lambda) = 0$$

とすると,

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ 2x - \dfrac{2\lambda}{a^2}x = 0, \\ 2y - \dfrac{2\lambda}{b^2}y = 0. \end{cases}$$

これを解くと,

$$(x,y,\lambda) = (0,\pm b, b^2), (\pm a, 0, a^2).$$

よって, 極値をあたえる点の候補は

$$(x,y) = (0,\pm b), (\pm a, 0).$$

ここで, 楕円は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合で, 関数 $x^2 + y^2$ はこの楕円で連続となるから, 最大値および最小値をもつことに注意する.
上の 4 点における値を比較すると, この楕円の上で関数 $x^2 + y^2$ は $(\pm a, 0)$ で最大値 a^2, $(0, \pm b)$ で最小値 b^2 をとる.

2. まず, 楕円は特異点をもたないことに注意する.
次に,

$$F(x,y,\lambda) = lx + my - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

とおき,

$$F_\lambda(x,y,\lambda) = F_x(x,y,\lambda) = F_y(x,y,\lambda) = 0$$

とすると,

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ l - \dfrac{2\lambda}{a^2}x = 0, \\ m - \dfrac{2\lambda}{b^2}y = 0. \end{cases}$$

第 2 式, 第 3 式と $(l,m) \neq (0,0)$ より,

$$\lambda \neq 0.$$

第 2 式と第 3 式より,

$$x = \frac{a^2 l}{2\lambda},\ y = \frac{b^2 m}{2\lambda}.$$

第 1 式に代入すると,

$$\frac{a^2 l^2}{4\lambda^2} + \frac{b^2 m^2}{4\lambda^2} = 1.$$

よって,

$$(x, y, \lambda) = \pm\left(\frac{a^2 l}{\sqrt{a^2l^2+b^2m^2}}, \frac{b^2 m}{\sqrt{a^2l^2+b^2m^2}}, \frac{\sqrt{a^2l^2+b^2m^2}}{2}\right).$$

従って, 極値をあたえる点の候補は

$$(x, y) = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2l^2+b^2m^2}}(a^2 l, b^2 m)$$

ここで, 楕円は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合で, 関数 $lx+my$ はこの楕円で連続となるから, 最大値および最小値をもつことに注意する.
上の 2 点における値を比較すると, この楕円の上で関数 $lx+my$ は $\frac{1}{\sqrt{a^2l^2+b^2m^2}}(a^2 l, b^2 m)$ で最大値 $\sqrt{a^2l^2+b^2m^2}$, $-\frac{1}{\sqrt{a^2l^2+b^2m^2}}(a^2 l, b^2 m)$ で最小値 $-\sqrt{a^2l^2+b^2m^2}$ をとる.

3. まず, l は特異点をもたないことに注意する.
次に,

$$F(x, y, \lambda) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - \lambda(ax+by+c)$$

とおき,

$$F_\lambda(x, y, \lambda) = F_x(x, y, \lambda) = F_y(x, y, \lambda) = 0$$

とすると,

$$\begin{cases} ax+by+c=0, \\ 2(x-x_0)-a\lambda=0, \\ 2(y-y_0)-b\lambda=0. \end{cases}$$

第 2 式と第 3 式より,

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}a\lambda + x_0, \frac{1}{2}b\lambda + y_0\right).$$

第 1 式に代入すると,

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2)\lambda + ax_0 + by_0 + c = 0.$$

即ち,

$$\lambda = -\frac{2(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}.$$

よって, 極値をあたえる点の候補は一つとなるから, この点で P と l 上の点の距離は最小となる.
従って, P と l の距離は

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} &= \sqrt{\frac{1}{4}(a^2+b^2)\lambda^2} \\ &= \sqrt{\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}} \\ &= \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{aligned}$$