§7. 重積分

1 変数関数の定積分は多変数の場合には多重積分または重積分とよばれるものへと一般化される．1 変数関数の定積分は少なくとも有界閉区間で定義された連続関数に対しては定義することができた．2 変数以上の場合にはどうであろうか? 以下では 2 変数の場合を考え, まずは D を $\mathbf{R}^2$ の有界集合とする．実際の計算では D は具体的にあたえられるので, あまり神経質になる必要はない．例えば, $a < b$, $c < d$ とすると, 集合

$$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$

は長方形領域とよばれるよく使われる $\mathbf{R}^2$ の有界集合である．
次に, $f(x, y)$ を D で定義された関数とする．このとき, D と関数 $z = f(x, y)$ のグラフおよび D の境界上の点を通り xy 平面と垂直に交わる直線達で囲まれた図形を考えることができる．おおざっぱに言うとこの図形の体積が存在するとき, 関数 $f(x, y)$ は D で 2 重積分可能または重積分可能であるという．このとき, この体積を

$$\iint_D f(x, y)dxdy$$

と書き, $f(x, y)$ の D 上の 2 重積分または重積分とよぶ．ここで言う体積は符号も込めて考えたもので, $f(x, y)$ が D 上で常に負ならば, 上の重積分の値も負となる．重積分を単に積分とよぶことも多い．
重積分が存在するための十分条件は次であたえられる．

定理　D を $\mathbf{R}^2$ の有界集合とする．定数関数 1 が D で積分可能で, 関数 $f(x, y)$ が D で連続ならば, $f(x, y)$ は D で積分可能．

定数関数 1 が D で積分可能なとき, D は面積確定であるという．また, このとき積分

$$\iint_D dxdy$$

を D の面積とよぶ．なお, 1 変数関数の積分の場合と同様に, 定数関数 1 に対する重積分は 1 を省略して上の様に書いた．また, 面積確定でない有界集合の例については, 話が難しくなることもあり, ここでは触れないことにする．
以下では, 重積分を考える場合は特に断らない限り, 上の定理の仮定はみたされているものとする．
1 変数の場合と同様に, 次の三つの定理が成り立つ．

定理　次の (1)〜(3) が成り立つ．

(1) $\displaystyle\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y))dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy \pm \iint_D g(x, y)dxdy$　(複号同順).

(2) $c \in \mathbf{R}$ とすると, $\displaystyle\iint_D cf(x, y)dxdy = c\iint_D f(x, y)dxdy.$

(3) D が境界の一部のみ共有する D_1, D_2 に分けられるとき,

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy.$$

定理　D 上で $f(x, y) \leq g(x, y)$ が成り立つならば,

$$\iint_D f(x, y)dxdy \leq \iint_D g(x, y)dxdy.$$

等号成立は D 上で $f(x,y)=g(x,y)$ が成り立つときに限る.
特に, D 上で $f(x,y)\geq 0$ ならば,

$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0.$$

等号成立は D 上で $f(x,y)=0$ のときに限る.

定理 $\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|dxdy.$

実際に重積分を計算する際には, 次の定理を用いて 1 変数関数の定積分に帰着させることが多い.

定理 $a<b$ とし, $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ を区間 $[a,b]$ 上で $\varphi_1(x)\leq\varphi_2(x)$ をみたす連続関数とする. D が

$$D=\{(x,y)|a\leq x\leq b,\ \varphi_1(x)\leq y\leq\varphi_2(x)\}$$

によりあたえられるとき,

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$

上の式の右辺の積分を逐次積分または累次積分とよび, 単に

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

とも書く. また, 上の定理のように表される D を x について単純な領域とよぶ.
特に,

$$\begin{aligned}\iint_D dxdy&=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\\&=\int_a^b(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))dx\end{aligned}$$

であるから, 1 変数関数の定積分のことを思い出せば, 定数関数 1 の D 上の積分を D の面積とよぶ理由が理解できる.
領域 D が y について単純な場合, 即ち

$$D=\{(x,y)|\psi_1(y)\leq x\leq\psi_2(y),\ c\leq y\leq d\}$$

と表される場合も同様に,

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

が成り立つ.
特に, 長方形領域

$$R=\{(x,y)|a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\}$$

は x についても y についても単純な領域であるから,

$$\iint_R f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

が成り立つ.

例　長方形領域

$$R = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 2\}$$

を考える.
R を x について単純な領域とみなすと,

$$\begin{aligned}
\iint_R (x+2y)dxdy &= \int_0^1 dx \int_1^2 (x+2y)dy \\
&= \int_0^1 \left[xy + y^2\right]_{y=1}^{y=2} dx \\
&= \int_0^1 \{2x+4-(x+1)\}dx \\
&= \int_0^1 (x+3)dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_0^1 \\
&= \frac{7}{2}.
\end{aligned}$$

R を y について単純な領域とみなすと,

$$\begin{aligned}
\iint_R (x+2y)dxdy &= \int_1^2 dy \int_0^1 (x+2y)dx \\
&= \int_1^2 \left[\frac{1}{2}x^2 + 2xy\right]_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \int_1^2 \left(\frac{1}{2} + 2y\right) dy \\
&= \left[\frac{1}{2}y + y^2\right]_1^2 \\
&= (1+4) - \left(\frac{1}{2} + 1\right) \\
&= \frac{7}{2}.
\end{aligned}$$

もちろん両者の積分の値は等しい.

例　長方形領域

$$R = \{(x,y) | a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$

を考え, $f(x)$ を区間 $[a,b]$ で定義された連続関数, $g(y)$ を区間 $[c,d]$ で定義された連続関数とする. このとき,

$$\iint_R f(x)g(y)dxdy = \int_a^b f(x)dx \int_c^d g(y)dy$$

が成り立つことが容易に分かる. これは今後使われることの多い事実である.

問題 7

1. 次の (1), (2) の重積分の値について, D を x について単純な領域とみなしたときと y について単純な領域とみなしたときの, 二通りの方法で累次積分を用いて求めよ.

(1) D を x 軸, y 軸および直線 $x+y=1$ で囲まれた領域としたときの重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy.$

(2) D を

$$D=\{(x,y)|x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1\}$$

により定まる領域としたときの重積分 $\displaystyle\iint_D y\,dxdy.$

2. 次の (1)〜(3) の重積分の値を求めよ.

(1) D を長方形領域

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leq x\leq \frac{\pi}{2},\ 0\leq y\leq 1\right\}$$

としたときの重積分 $\displaystyle\iint_D y\sin xy\,dxdy.$

(2) D を長方形領域

$$D=\{(x,y)\,|0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 2\}$$

としたときの重積分 $\displaystyle\iint_D ye^{xy}\,dxdy.$

(3) D を長方形領域

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq \sqrt{3}\right\}$$

としたときの重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{y}{1+x^2y^2}\,dxdy.$

問題 7 の解答

1. (1) D を x について単純な領域とみなすと,

$$\begin{aligned}\iint_D x\,dxdy &= \int_0^1 dx \int_0^{-x+1} x\,dy \\ &= \int_0^1 [xy]_{y=0}^{y=-x+1} dx \\ &= \int_0^1 (-x^2+x)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

D を y について単純な領域とみなすと,

$$\begin{aligned}\iint_D x\,dxdy &= \int_0^1 dy \int_0^{-y+1} x\,dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=-y+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-y)^2 dy \\ &= \left[-\frac{1}{6}(1-y)^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

(2) D を x について単純な領域とみなすと,

$$\begin{aligned}\iint_D y\,dxdy &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^2)dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

D を y について単純な領域とみなすと,

$$\begin{aligned}\iint_D y\,dxdy &= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} y\,dx \\ &= \int_0^1 [xy]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} dx \\ &= \int_0^1 y\sqrt{1-y^2}dy\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[-\frac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

2. (1) D を y について単純な領域とみなすと,

$$
\begin{aligned}
\iint_D y\sin xy dxdy &= \int_0^1 dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sin xy dx \\
&= \int_0^1 \left[-\cos xy\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} dy \\
&= \int_0^1 \left(-\cos\frac{\pi}{2}y+1\right) dy \\
&= \left[-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}y+y\right]_0^1 \\
&= -\frac{2}{\pi}+1.
\end{aligned}
$$

(2) D を y について単純な領域とみなすと,

$$
\begin{aligned}
\iint_D ye^{xy} dxdy &= \int_0^2 dy \int_0^1 ye^{xy} dx \\
&= \int_0^2 \left[e^{xy}\right]_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \int_0^2 (e^y-1) dy \\
&= \left[e^y-y\right]_0^2 \\
&= e^2-3.
\end{aligned}
$$

(3) D を y について単純な領域とみなすと,

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{y}{1+x^2y^2} dxdy &= \int_0^{\sqrt{3}} dy \int_0^1 \frac{y}{1+x^2y^2} dx \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \left[\tan^{-1} xy\right]_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \tan^{-1} y dy \\
&= \left[y\tan^{-1} y\right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{y}{1+y^2} dy \\
&= \sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - \left[\frac{1}{2}\log(1+y^2)\right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \log 2.
\end{aligned}
$$