§8. 変数変換公式

1 変数関数の置換積分は多変数の場合には変数変換公式へと一般化される．変数変換公式には §3 で扱った Jacobian が現れるが, この意味をよく説明する次の例を考えてみよう．

例　まず, E を頂点が $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$ の uv 平面内の正方形で囲まれた領域とする．このとき, E の面積は 1 である．
次に, a,b,c,d を $ad-bc\neq 0$ をみたす定数とし, uv 平面から xy 平面への変数変換を

$$x=au+bv,\ y=cu+dv$$

により定める．この変数変換により, E は頂点が $(0,0),(a,c),(a+b,c+d),(b,d)$ の平行四辺形で囲まれた領域 D へ写される．
初等的な計算により, E の面積は $|ad-bc|$ であることが分かる．ここに現れた絶対値の中身 $ad-bc$ は上の変数変換に対する Jacobian に一致する．以上の計算を積分を用いて表すと,

$$\iint_D dxdy=\iint_E\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

となる．

では, 早速だが変数変換公式について述べよう．

変数変換公式　E を uv 平面内の面積確定な集合とし, C^1 級の変数変換

$$x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v)$$

によって, E は xy 平面内の面積確定な集合 D へ写されるとする．関数 $f(x,y)$ が D で連続ならば,

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_E f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv.$$

例　xy 平面内の領域 D を

$$D=\{(x,y)||x+y-1|\leq 2,\ |x-y+1|\leq 2\}$$

により定め, 重積分

$$\iint_D(x-y+1)^2dxdy$$

の値を求めよう．これは例えば y 軸を境目に D を x について単純な二つの領域に分けて計算することもできるが, 少々複雑である．次のようにアファイン変換を用いる方が容易であろう．
アファイン変換

$$u=x+y-1,\ v=x-y+1$$

を考える．即ち,

$$x=\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v,\ y=\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v+1$$

である．
このとき,

$$E=\{(u,v)||u|\leq 2,\ |v|\leq 2\}$$

とおくと, D は E へ, 逆の言い方をすると E は D へ写される．

また,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ = -\frac{1}{2}$$

だから, 変数変換公式より,

$$\begin{aligned}\iint_D (x-y+1)^2 dxdy &= \iint_E v^2 \cdot \frac{1}{2} dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} du \int_{-2}^{2} v^2 dv \\ &= \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot \left[\frac{1}{3}v^3\right]_{-2}^{2} \\ &= \frac{32}{3}.\end{aligned}$$

変数変換には 1 対 1 であることや Jacobian が 0 とならないことが要求されることもある. しかし, 変換が 1 対 1 とならない点や Jacobian が 0 となる点が存在しても, それら全体の面積が 0 ならば変数変換公式は成り立つ.
この事実は例えば次の例のように極座標変換

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

の場合に用いられる. ここで, 極座標変換に対する Jacobian は §3 で計算したように, r であったことを思い出しておこう.

例 (Gauss 積分)

広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ は Gauss 積分とよばれ, 統計学における正規分布にも現れる重要なものである. この積分の値は $\sqrt{\pi}$ であることが知られているが, 極座標変換と変数変換公式を用いて計算することができる. 被積分関数 e^{-x^2} は偶関数であるから,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を示せばよい.
$a > 0$ とし, xy 平面内の領域 $D(a), E(a)$ を

$$D(a) = \{(x,y) | 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a\},\ E(a) = \{(x,y) | x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

により定める.
関数 $e^{-x^2-y^2}$ は常に正で,

$$E(a) \subset D(a) \subset E(\sqrt{2}a)$$

だから,

$$\iint_{E(a)} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \iint_{D(a)} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \iint_{E(\sqrt{2}a)} e^{-x^2-y^2} dxdy \qquad (*)$$

が成り立つ.

ここで,

$$\begin{aligned}\iint_{D(a)} e^{-x^2-y^2}dxdy &= \iint_{D(a)} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy\\ &= \int_0^a e^{-x^2}dx \int_0^a e^{-y^2}dy\\ &= \left(\int_0^a e^{-x^2}dx\right)^2.\end{aligned}$$

また, 極座標変換を用いると, $E(a)$ は $r\theta$ 平面内の長方形領域

$$\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\le r\le a,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

へ写されるから, 変数変換公式より,

$$\begin{aligned}\iint_{E(a)} e^{-x^2-y^2}dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a e^{-r^2}rdr\\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a\\ &= \frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}).\end{aligned}$$

上の計算で a を $\sqrt{2}a$ に置き換えると,

$$\iint_{E(\sqrt{2}a)} e^{-x^2-y^2}dxdy = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2}).$$

よって, $(*)$ より,

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}) \le \left(\int_0^a e^{-x^2}dx\right)^2 \le \frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2}).$$

右と左の式の $a=+\infty$ における極限は $\frac{\pi}{4}$ だから, はさみうちの原理より,

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 &= \lim_{a\to+\infty}\left(\int_0^a e^{-x^2}dx\right)^2\\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

更に,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx > 0$$

だから,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を得る.
なお, 初めから有界でない領域で考え, 積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2}rdr$$

を計算するのは厳密には広義の重積分に関する知識を必要とする. 広義の重積分は 1 変数関数の広義積分よりは込み入った話になるので, これ以上詳しくは述べない.

問題 8

1. 変数変換公式を用いて, 次の (1) から (3) の重積分の値を求めよ.

(1) D を

$$D = \{(x,y) | |x+2y+5| \leq 1,\ |x-2y-3| \leq 2\}$$

により定まる領域としたときの重積分 $\displaystyle\iint_D (x+2y+5)^4 dxdy.$

(2) D を

$$D = \{(x,y) | 0 \leq x+y \leq \pi,\ 0 \leq x-y \leq \pi\}$$

により定まる領域としたときの重積分 $\displaystyle\iint_D (x+y)\sin(x-y) dxdy.$

(3) D を

$$D = \{(x,y) | 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

により定まる領域としたときの重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}.$

2. $a, b > 0$ とし, 楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

で囲まれた領域を D とする. 変数変換公式を用いて, D の面積が πab であることを示せ.

問題 8 の解答

1. (1) アファイン変換

$$u = x + 2y + 5,\ v = x - 2y - 3$$

を考える.
即ち,

$$x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v - 1,\ y = \frac{1}{4}u - \frac{1}{4}v - 2.$$

このとき,

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

よって,

$$E = \{(u,v)||u| \leq 1,\ |v| \leq 2\}$$

とおくと, 変数変換公式より,

$$\begin{aligned}\iint_D (x + 2y + 5)^4 dxdy &= \iint_E u^4 \cdot \frac{1}{4} dudv \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} u^4 du \int_{-2}^{2} dv \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{5}u^5\right]_{-1}^{1} \cdot 4 \\ &= \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

(2) 線形変換

$$u = x + y,\ v = x - y$$

を考える.
即ち,

$$x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v,\ y = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v.$$

このとき,

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

よって,

$$E = \{(u,v)|0 \leq u \leq \pi,\ 0 \leq v \leq \pi\}$$

とおくと, 変数変換公式より,

$$\begin{aligned}\iint_D (x + y)\sin(x - y) dxdy &= \iint_E u(\sin v)\frac{1}{2} dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} udu \int_0^{\pi} \sin v dv \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^{\pi} [-\cos v]_0^{\pi}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{2} \cdot 2 \\
&= \frac{\pi^2}{2}.
\end{aligned}
$$

(3) 極座標変換を用いると, D は長方形領域

$$E = \{(r, \theta) | 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

へ写される.
よって, 変数変換公式より,

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2} &= \iint_E \frac{1}{r^2} r dr d\theta \\
&= \int_1^2 \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= [\log r]_1^2 \cdot 2\pi \\
&= 2\pi \log 2.
\end{aligned}
$$

2. 変数変換

$$x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$$

を考える.
このとき, D は長方形領域

$$E = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

へ写される.
また,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} &= (a\cos\theta) br\cos\theta - (-ar\sin\theta) b\sin\theta \\
&= abr.
\end{aligned}
$$

よって, D の面積は

$$
\begin{aligned}
\iint_D dxdy &= \iint_E abr dr d\theta \\
&= ab \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= ab \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^1 \cdot 2\pi \\
&= \pi ab.
\end{aligned}
$$