§9. 面積と体積

まず, 極座標変換と変数変換公式を用いて, 平面 $\mathbf{R}^2$ 内の領域の面積について考えてみる.

定理　$0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ とし, $r = f(\theta)$ を区間 $[\alpha, \beta]$ で連続な非負関数とする. 極座標を用いて表される曲線 $r = f(\theta)$ と半直線 $\theta = \alpha$ および $\theta = \beta$ で囲まれた領域の面積は

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\theta))^2 d\theta.$$

証明　上の領域を D とおく.
極座標変換を用いると, D は領域

$$E = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

へ写される.
よって, D の面積は

$$\begin{aligned}\iint_D dxdy &= \iint_E r dr d\theta \\ &= \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{f(\theta)} r dr \\ &= \int_\alpha^\beta \left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{r=f(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\theta))^2 d\theta.\end{aligned}$$

□

例　$a > 0$, $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ とすると, 極座標を用いて

$$\{(r, \theta) | 0 \leq r \leq a,\ \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

と表される扇形の面積は

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta a^2 d\theta = \frac{1}{2}a^2(\beta - \alpha).$$

特に, 半径 a の円の面積は πa^2 となる.

例 (心臓形またはカージオイド)
$a > 0$ とし, 区間 $[0, 2\pi]$ で定義された関数 $r = a(1 + \cos\theta)$ を考える. 極座標を用いて表される曲線 $r = a(1 + \cos\theta)$ は心臓形またはカージオイドとよばれる.
上の定理を用いると, この曲線で囲まれた領域の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta &= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{3}{2}\pi a^2.\end{aligned}$$

例　$a>0$ とし, レムニスケート

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$$

を考える. §5 の問題では $a=1$ のときを考えた.
極座標を用いると, 上の式は

$$r^2=2a^2\cos 2\theta$$

と同値である.
但し, $r\geq 0$ であるから, θ の範囲は

$$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\leq\theta\leq\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi\leq\theta\leq 2\pi$$

である.
この曲線で囲まれた領域の面積は $0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{4}$ の部分の面積を 4 倍して,

$$\begin{aligned}4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}2a^2\cos 2\theta d\theta &= 4a^2\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\ &=2a^2.\end{aligned}$$

次に, 空間 $\mathbf{R}^3$ 内の領域の体積について考える.
D を $\mathbf{R}^2$ の面積確定な部分集合, $g(x,y), f(x,y)$ を D 上で $f(x,y)\leq g(x,y)$ をみたす積分可能な関数とし, $\mathbf{R}^3$ の部分集合 V を

$$V=\{(x,y,z)|(x,y)\in D,\ f(x,y)\leq z\leq g(x,y)\}$$

により定める. このとき, V の体積は重積分

$$\iint_D(g(x,y)-f(x,y))dxdy$$

によりあたえられる.

例　$a>0$ とし, V を原点中心, 半径 a の球とする. このとき,

$$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq a^2\}$$

とおくと,

$$V=\{(x,y,z)|(x,y)\in D,\ -\sqrt{a^2-x^2-y^2}\leq z\leq\sqrt{a^2-x^2-y^2}\}$$

と表される.
極座標変換を用いると, D は領域

$$E=\{(r,\theta)|0\leq r\leq a,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$$

へ写されるから, V の体積は

$$\begin{aligned}\iint_D 2\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy &= 2\iint_E\sqrt{a^2-r^2}\cdot rdrd\theta\\ &=2\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}dr\int_0^{2\pi}d\theta\\ &=2\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a\cdot 2\pi\\ &=\frac{4}{3}\pi a^3.\end{aligned}$$

最後に, Cavalieri の原理について述べておこう.
V を $\mathbf{R}^3$ 内の体積確定な部分集合とし, $a < b$ となる $a, b \in \mathbf{R}$ が存在し,

$$V \subset \{(x, y, z) | a \leq x \leq b\}$$

をみたすとする.
このとき, 各 $x_0 \in [a, b]$ に対し x 軸に垂直な平面 $x = x_0$ による V の切り口

$$\{(y, z) | (x_0, y, z) \in V\}$$

を考えることができる. これを単に x_0 に対する V の切り口とよび, V_{x_0} と書くことにする.
ここで, 更に V_{x_0} が面積確定であるとする. このとき, V_{x_0} の面積 $S(x_0)$ が定まる.

Cavalieri の原理　上の V の体積は

$$\int_a^b S(x)dx.$$

例　上の例において,

$$V \subset \{(x, y, z) | -a \leq x \leq a\}.$$

また, $x \in [-a, a]$ とすると, V_x は半径 $\sqrt{a^2 - x^2}$ の円板.
よって,

$$S(x) = \pi(a^2 - x^2).$$

従って, V の体積は

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a S(x)dx &= \int_{-a}^a \pi(a^2 - x^2)dx \\ &= \pi \left[a^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-a}^a \\ &= \frac{4}{3}\pi a^3. \end{aligned}$$

上の例は更に次のように回転体とよばれる領域の場合に一般化することができる.

例　$f(x)$ を区間 $[a, b]$ で連続な関数とし, V を xyz 空間の中で曲線 $y = f(x)$ を x 軸の周りで回転して得られる領域とする.
このとき,

$$V \subset \{(x, y, z) | a \leq x \leq b\}.$$

また, $x \in [a, b]$ とすると, V_x は半径 $|f(x)|$ の円板.
よって,

$$S(x) = \pi(f(x))^2.$$

従って, V の体積は

$$\pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

例えば, $h, a > 0$ とすると, 区間 $[0, h]$ で定義された線分 $y = \dfrac{a}{h}x$ を x 軸の周りで回転して得られる円錐の体積は $\dfrac{\pi}{3}a^2 h$ となることが確かめられる.

問題 9

1. $a > 0$ とする. Descartes の葉形

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

で囲まれた領域の面積を求めよ.

2. $a, b, c > 0$ とし, $f(x)$ を区間 $[-c, c]$ で常に正となる連続な関数とする. このとき, $\mathbf{R}^2$ の領域 D および $\mathbf{R}^3$ の領域 V をそれぞれ

$$D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq c\},\ V = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, (x,y) \in D,\ 0 \leq z \leq \frac{af(x) + bf(y)}{f(x) + f(y)} \right\}$$

により定める. V の体積は $\dfrac{1}{2}\pi c^2(a+b)$ となることを示せ.

3. $a > 0$ とし, 曲線

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

を考える. この曲線は懸垂線またはカテナリーとよばれる. また, xyz 空間の中でカテナリーを x 軸の周りで回転して得られる曲面を懸垂面またはカテノイドとよぶ.
$b > 0$ とし, カテノイドと平面 $x = 0$ および $x = b$ で囲まれた領域の体積を Cavalieri の原理を用いて求めよ.

4. O を空間 $\mathbf{R}^3$ の原点, $\mathrm{P}(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ とし, 線分 OP の長さを r とおく. 次に, z 軸とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とのなす角を θ とおく. 更に, P の xy 平面への射影を Q とし, x 軸とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とのなす角を φ とおく. 但し, θ, φ はそれぞれ $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ の範囲に選んでおく. このとき,

$$x = r \sin\theta \cos\varphi,\ y = r \sin\theta \sin\varphi,\ z = r\cos\theta$$

が成り立ち, (r, θ, φ) を空間極座標とよぶ. 空間極座標に対しても 3 次行列の行列式を用いて x, y, z の r, θ, φ に対する Jacobian $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$ が定まり,

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix} = r^2 \sin\theta$$

となることが分かる.
$a > 0$ とすると, 半径 a の球は空間極座標を用いて,

$$W = \{(r, \theta, \varphi) | 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

と表される. 重積分

$$\iiint_W r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi$$

を計算することにより, 半径 a の球の体積を求めよ.

問題 9 の解答

1. 極座標を用いると, この曲線を表す式は

$$r^3\cos^3\theta - 3a(r\cos\theta)r\sin\theta + r^3\sin^3\theta = 0.$$

即ち,

$$r = \frac{3a\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}$$

求める領域の面積は $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で考えて,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3a\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}\right)^2 d\theta &= \frac{9}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\tan\theta}{1+\tan^3\theta}\right)^2\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \frac{9}{2}a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt \quad (t=\tan\theta) \\
&= \frac{9}{2}a^2\left[-\frac{1}{3}\frac{1}{1+t^3}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{9}{2}a^2\cdot\frac{1}{3} \\
&= \frac{3}{2}a^2.
\end{aligned}$$

2. x と y を入れ替えることにより,

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}dxdy &= \iint_D \frac{f(y)}{f(x)+f(y)}dxdy \\
&= \iint_D \frac{f(x)+f(y)-f(x)}{f(x)+f(y)}dxdy \\
&= \iint_D dxdy - \iint_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}dxdy \\
&= \pi c^2 - \iint_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}dxdy.
\end{aligned}$$

よって,

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}dxdy = \frac{\pi}{2}c^2.$$

従って, V の体積は

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)} &= (a+b)\iint_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}dxdy \\
&= \frac{\pi}{2}c^2(a+b).
\end{aligned}$$

3. 求める体積は

$$\begin{aligned}
\pi\int_0^b\left(a\cosh\frac{x}{a}\right)^2 dx &= \pi a^2\int_0^b\cosh^2\frac{x}{a}dx \\
&= \pi a^2\int_0^b\frac{1+\cosh\dfrac{2x}{a}}{2}dx \\
&= \pi a^2\left[\frac{1}{2}x+\frac{a}{4}\sinh\frac{2x}{a}\right]_0^b
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}\left(2b + a\sinh\frac{2b}{a}\right).$$

4. 求める体積は

$$\begin{aligned}\iiint_W r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi &= \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^a [-\cos\theta]_0^\pi \cdot 2\pi \\ &= \frac{4}{3}\pi a^3.\end{aligned}$$