§11. Γ 関数と B 関数

広義積分を用いて

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

により定義される Γ 関数は $s > 0$ のときに収束する 1 変数関数である. Γ 関数は 1 変数の微分積分でも扱われるが, ここでは 2 変数関数である B 関数との関係も見ていく. また, Γ 関数, B 関数はそれぞれ統計学における Γ 分布, B 分布にも現れる.
Γ 関数についての最も基本的な性質は次に挙げるものであろう.

定理　次の (1)〜(3) が成り立つ.
(1) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.
(2) n を自然数とすると, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
(3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

証明　(1): 部分積分法より,

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx \\ &= \left[-e^{-x} x^s\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} s x^{s-1} dx \\ &= s\Gamma(s).\end{aligned}$$

(2): (1) と

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\ &= \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} \\ &= 1\end{aligned}$$

を用いればよい.
(3): 変数変換 $t = \sqrt{x}$ を行うと,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \frac{1}{t} \cdot 2t dt \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

□

(2) より, Γ 関数は階乗の一般化とみなすことができる.

自然数全体を $\mathbf{N}$ と書く. $n \in \mathbf{N}$ のとき, $n + \dfrac{1}{2}$ における Γ 関数の値も次のように具体的に求めることができる.

例　上の定理の (1), (3) より, $n \in \mathbf{N}$ のとき,

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) \\
&= \cdots \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2n-1}{2}\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{2n-(2n-1)}{2}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

B 関数は定積分

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

により定義される p と q の 2 変数関数である. この積分は $p>0$, $q>0$ に対して考え, $0<p<1$ または $0<q<1$ のときは広義積分となるが収束することが分かる. B 関数についても基本的な性質を述べておこう.

定理　次の (1)〜(3) が成り立つ.
(1) $B(p,q) = B(q,p)$.
(2) $pB(p,q+1) = qB(p+1,q)$.
(3) $B(p,q) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta$.

証明　(1), (2) のみ示す.
(1): 変数変換 $x = 1-t$ を行うと,

$$\begin{aligned}
B(p,q) &= \int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}(-dt) \\
&= \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt \\
&= B(q,p).
\end{aligned}$$

(2): 部分積分法より,

$$\begin{aligned}
pB(p,q+1) &= p\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx \\
&= \left[x^p(1-x)^q\right]_0^1 + q\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx \\
&= qB(p+1,q).
\end{aligned}$$

□

次の定理は Γ 関数と B 関数を結び付ける基本関係式である. 証明は広義の重積分が現れない場合に行うことにする. §8 で現れた Gauss 積分の計算を思い出すとよい.

定理　$B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

証明 $p,q \geq \dfrac{1}{2}$ の場合のみ示す.
$a>0$ とし, xy 平面内の領域 $D(a), E(a)$ を

$$D(a)=\{(x,y)|0\leq x\leq a,\ 0\leq y\leq a\},\ E(a)=\{(x,y)|x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq a^2\}$$

により定め,

$$f(x,y)=4e^{-x^2-y^2}x^{2p-1}y^{2q-1}$$

とおく.
関数 $f(x,y)$ は常に非負で,

$$E(a)\subset D(a)\subset E(\sqrt{2}a)$$

だから,

$$\iint_{E(a)} f(x,y)dxdy \leq \iint_{D(a)} f(x,y)dxdy \leq \iint_{E(\sqrt{2}a)} f(x,y)dxdy$$

が成り立つ.
ここで,

$$\begin{aligned}\iint_{D(a)} f(x,y)dxdy &= \left(2\int_0^a e^{-x^2}x^{2p-1}dx\right)\left(2\int_0^a e^{-y^2}y^{2q-1}dy\right)\\ &= \left(\int_0^{a^2} e^{-s}s^{p-1}ds\right)\left(\int_0^{a^2} e^{-t}t^{q-1}dt\right) \quad (s=x^2,\ t=y^2)\\ &\to \Gamma(p)\Gamma(q) \quad (a\to+\infty).\end{aligned}$$

また, 極座標変換を用いると, $E(a)$ は領域

$$F(a)=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leq r\leq a,\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right\}$$

へ写されるから, 上の定理の (3) より,

$$\begin{aligned}\iint_{E(a)} f(x,y)dxdy &= 4\iint_{F(a)} e^{-r^2}(r\cos\theta)^{2p-1}(r\sin\theta)^{2q-1}rdrd\theta\\ &= \left(2\int_0^a e^{-r^2}r^{2p+2q-1}dr\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta\right)\\ &\to \Gamma(p+q)B(p,q) \quad (a\to+\infty).\end{aligned}$$

よって, はさみうちの原理より,

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)B(p,q).$$

即ち,

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

□

問題 11

1. $a > -1$ とする. 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a \theta d\theta$$

を Γ 関数を用いて表せ.

2. $a, b > 0$, $c > \dfrac{b}{a}$ とする.

(1) 広義積分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{b-1}}{(1+x^a)^c} dx$$

を Γ 関数を用いて表せ.

(2) $0 < s < 1$ のとき, 相補公式

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

が成り立つ. このことを用いて, 等式

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{b-1}}{1+x^a} dx = \frac{\pi}{a \sin \frac{b}{a}\pi}$$

を示せ.

(3) $n \in \mathbf{N}$ のとき, 等式

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2}$$

を示せ.

3. $a, b, c > 0$ とする.

(1) 定積分

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x^c)^{b-1} dx$$

を Γ 関数を用いて表せ.

(2) 等式

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{\sqrt{1-x^{4a}}} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{4\sqrt{2\pi}a}$$

を示せ.

問題 11 の解答

1. 等式

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta$$

において $a=2p-1,\ q=\dfrac{1}{2}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^a\theta d\theta&=\frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2},\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}+\frac{1}{2}\right)}\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)}.\end{aligned}$$

2. (1) 変数変換

$$t=\frac{1}{1+x^a}$$

を行うと,

$$x=\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{a}},\ dx=-\frac{1}{a}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{a}-1}\frac{dt}{t^2}.$$

よって,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^{b-1}}{(1+x^a)^c}dx&=\int_1^0 t^c\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{b-1}{a}}\left(-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{a}-1}\frac{dt}{t^2}\\&=\frac{1}{a}\int_0^1 t^{c-\frac{b}{a}-1}(1-t)^{\frac{b}{a}-1}dt\\&=\frac{1}{a}B\left(c-\frac{b}{a},\frac{b}{a}\right)\\&=\frac{\Gamma\left(c-\frac{b}{a}\right)\Gamma\left(\frac{b}{a}\right)}{a\Gamma(c)}.\end{aligned}$$

(2) (1) において $c=1$ とおくと,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^{b-1}}{1+x^a}dx&=\frac{\Gamma\left(1-\frac{b}{a}\right)\Gamma\left(\frac{b}{a}\right)}{a\Gamma(1)}\\&=\frac{\pi}{a\sin\frac{b}{a}\pi}.\end{aligned}$$

(3) $n=1$ のとき,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}&=\left[\tan^{-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

$n \geq 2$ のとき, (1) において $a=2,\ b=1,\ c=n$ とおくと,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n} &= \frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(n)}\\ &= \frac{\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2(n-1)!}\\ &= \frac{\frac{2n-3}{2}\frac{2n-5}{2}\cdots\frac{2n-(2n-1)}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{2(n-1)(n-2)\cdots 1}\\ &= \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ.

3. (1) 変数変換 $t=x^c$ を行うと,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{a-1}(1-x^c)^{b-1}dx &= \int_0^1 t^{\frac{a-1}{c}}(1-t)^{b-1}\frac{1}{c}t^{\frac{1}{c}-1}dt\\ &= \frac{1}{c}\int_0^1 t^{\frac{a}{c}-1}(1-t)^{b-1}dt\\ &= \frac{1}{c}B\left(\frac{a}{c},b\right)\\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{a}{c}\right)\Gamma(b)}{c\Gamma\left(\frac{a}{c}+b\right)}.\end{aligned}$$

(2) (1) において $b=\frac{1}{2},\ c=4a$ とおくと,

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^{a-1}}{\sqrt{1-x^{4a}}}dx &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4a\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)}\\ &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4a\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}.\end{aligned}$$

ここで, 相補公式より,

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\sqrt{2}\pi.$$

よって,

$$\int_0^1\frac{x^{a-1}}{\sqrt{1-x^{4a}}}dx=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{4\sqrt{2\pi}a}.$$