§12. 線積分と Green の定理

平面 $\mathbf{R}^2$ 上の曲線は一般には

$$C : x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$$

と表される．但し, ここでは $\varphi(t), \psi(t)$ は有界閉区間で定義されているとする．例えば区間 $[a, b]$ で定義された関数 $y = f(x)$ のグラフは

$$C : x = t,\ y = f(t) \quad (t \in [a, b])$$

と表される．
線積分を定義するために, 平面上の曲線は向きを込みにして考えることにする．例えば, 上の曲線 C については C 上の点 $(\varphi(a), \psi(a))$ が C に沿って $(\varphi(b), \psi(b))$ まで進むと考えるのである．このとき,

$$C : x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \text{向き}\ t : a \to b$$

と書き, C を向き付けられた曲線とよぶ.
今まで単に曲線とよんできたものには 2 通りの向きが定まる．例えば, 上の C とは逆向きの曲線は

$$\overline{C} : x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \text{向き}\ t : b \to a$$

と表される．
以下では, C は区分的に C^1 級, 即ち $\varphi(t), \psi(t)$ は有限個の点を除き C^1 級であるとする．

定義　$f(x, y)$ を C で連続な関数とする．このとき,

$$\int_C f(x, y)dx = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt,\ \int_C f(x, y)dy = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)dt$$

と書き, これらを $f(x, y)$ の C に沿った線積分とよぶ.
また,

$$\int_C f(x, y)dx + g(x, y)dy = \int_C f(x, y)dx + \int_C g(x, y)dy$$

と書く．

注意　線積分の値は曲線の向きを変えると符号が変わる．例えば,

$$\begin{aligned}\int_{\overline{C}} f(x, y)dx &= \int_b^a f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt \\ &= -\int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt \\ &= -\int_C f(x, y)dx\end{aligned}$$

である．しかし, 向きを変えない変数変換に対しては線積分の値は変わらない．実際, $a = \lambda(\alpha)$, $b = \lambda(\beta)$ かつ $\lambda'(s) > 0$ となる変数変換 $t = \lambda(s)$ を考えると,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt &= \int_\alpha^\beta f(\varphi(\lambda(s)), \psi(\lambda(s)))\varphi'(\lambda(s))\lambda'(s)ds \\ &= \int_\alpha^\beta f((\varphi \circ \lambda)(s), (\psi \circ \lambda)(s))(\varphi \circ \lambda)'(s)ds\end{aligned}$$

となり, $\int_C f(x,y)dx$ は C の径数付けに依存しない. もう一方の $\int_C f(x,y)dy$ についても同様である. よって, 線積分は曲線とその向きのみによって定まる.

例 $a \in \mathbf{R}$ とし, 向きづけられた曲線

$$C : x = t,\ y = t^2,\ \text{向き}\ t:\ 0 \to a$$

を考える.
このとき,

$$\begin{aligned}\int_C (x+y)dx &= \int_0^a (t+t^2)\cdot 1dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3\right]_0^a \\ &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\int_C (x+y)dy &= \int_0^a (t+t^2)\cdot 2tdt \\ &= \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^4\right]_0^a \\ &= \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^4.\end{aligned}$$

D を境界が有限個の区分的に C^1 級の曲線の和集合となるような $\mathbf{R}^2$ の有界な領域とする. 但し, D の境界には D の内部が進行方向の左手となるように向きを定めておき, これを ∂D と書く.

Green の定理 $P(x,y), Q(x,y)$ が D で C^1 級ならば,

$$\int_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

証明 $P = 0$ の場合と $Q = 0$ の場合に分けて考えればよいが, $Q = 0$ の場合のみ示す. $P = 0$ の場合も同様である.
まず, D が x について単純な領域

$$D = \{(x,y) | a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

のときを考える.
向き付けられた曲線 C_1〜C_4 を

$$\begin{aligned}&C_1 : x = b,\ y = t,\ \text{向き}\ t : \varphi_1(b) \to \varphi_2(b), \\ &C_2 : x = t,\ y = \varphi_2(t),\ \text{向き}\ t : b \to a, \\ &C_3 : x = a,\ y = t,\ \text{向き}\ t : \varphi_2(a) \to \varphi_1(a), \\ &C_4 : x = t,\ y = \varphi_1(t),\ \text{向き}\ t : a \to b\end{aligned}$$

により定めると,

$$\int_{\partial D} P(x,y)dx = \int_{C_1} P(x,y)dx + \int_{C_2} P(x,y)dx + \int_{C_3} P(x,y)dx + \int_{C_4} P(x,y)dx.$$

ここで,

$$\begin{aligned}\int_{C_1} P(x,y)dx &= \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} P(b,t)\cdot 0dt \\ &= 0.\end{aligned}$$

同様に,

$$\int_{C_3} P(x,y)dx = 0.$$

よって,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} P(x,y)dx &= \int_{C_2} P(x,y)dx + \int_{C_4} P(x,y)dx \\ &= \int_b^a P(t,\varphi_2(t))dt + \int_a^b P(t,\varphi_1(t))dt \\ &= -\int_a^b (P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x)))dx \\ &= -\int_a^b \left[P(x,y)\right]_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} dx \\ &= -\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\ &= -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.\end{aligned}$$

即ち, Green の定理が成り立つ.
次に, D が一般のときを考える.
このとき, D を上のような領域に分割しておくと, 分割された各領域において Green の定理が成り立つ.
また, 各領域の境界のうち D の内部にあるものについては, 向きが逆のものが対で現れるから, それらに沿った線積分の値は 0 となる.
よって, Green の定理が成り立つ. □

例 Green の定理において,

$$P(x,y) = 0,\ Q(x,y) = x$$

とすると,

$$\int_{\partial D} xdy = \iint_D dxdy$$

となり, これは D の面積である.
同様に, D の面積は

$$-\int_{\partial D} ydx$$

とも表される.
これらを合わせると, D の面積は

$$\frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx$$

とも表される.

問題 12

1. 境界が有限個の区分的に C^1 級の曲線の和集合となる $\mathbf{R}^2$ の有界な領域 D の面積が線積分

$$\frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx$$

によりあたえられることを用いて, 次の (1)〜(3) の曲線で囲まれた領域の面積を求めよ.

(1) 楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

但し, $a,b>0$.

(2) アステロイド

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

但し, $a>0$.

(3) カージオイド

$$r=a(1+\cos\theta) \quad (\theta\in[0,2\pi]).$$

但し, (r,θ) は極座標で, $a>0$.

2. D を境界が有限個の区分的に C^1 級の曲線の和集合となる $\mathbf{R}^2$ の有界な領域, $P(x,y), Q(x,y)$ を D で C^1 級の関数とする. D 上で

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

が成り立つならば, 線積分

$$\int_{\partial D} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

の値は 0 となることを示せ.

3. $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ で定義された関数 $P(x,y), Q(x,y)$ を

$$P(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2},\ Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

により定める.

(1) $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上で

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 向き付けられた曲線 C を

$$C: x=\cos t,\ y=\sin t,\ \text{向き}\ t:0\to 2\pi$$

により定める. 線積分

$$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

の値を求めよ.

問題 12 の解答

1. (1) 楕円を向き付けられた曲線

$$C: x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ \text{向き}\ t: 0 \to 2\pi$$

として表しておくと, 求める面積は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_C xdy - ydx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t)(b\sin t)'dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(b\sin t)(a\cos t)'dt \\
&= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t + \sin^2 t)dt \\
&= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt \\
&= \pi ab.
\end{aligned}$$

(2) アステロイドを向き付けられた曲線

$$C: x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ \text{向き}\ t: 0 \to 2\pi$$

として表しておくと, 求める面積は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_C xdy - ydx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos^3 t)(a\sin^3 t)'dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\sin^3 t)(a\cos^3 t)'dt \\
&= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)dt \\
&= \frac{3a^2}{2}\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t)(1-\sin^2 t)dt \\
&= 6a^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 tdt\right) \\
&= 6a^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{3}{8}\pi a^2.
\end{aligned}$$

(3) カージオイドを向き付けられた曲線

$$C: x = a(1+\cos t)\cos t,\ y = a(1+\cos t)\sin t,\ \text{向き}\ t: 0 \to 2\pi$$

として表しておくと, 求める面積は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_C xdy - ydx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a(1+\cos t)(\cos t)\{a(1+\cos t)\sin t\}'dt \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a(1+\cos t)(\sin t)\{a(1+\cos t)\cos t\}'dt \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos t)\left\{\cos t(\cos t - \sin^2 t + \cos^2 t) + \sin t(\sin t + 2\sin t\cos t)\right\}dt \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos t)^2 dt \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1 + 2\cos t + \cos^2 t)dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt \\
&= \frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}t+2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{3}{2}\pi a^2.
\end{aligned}
$$

2. Green の定理より,

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial D} P(x,y)dx+Q(x,y)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \\
&= \iint_D 0dxdy \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

3. (1) まず,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{1\cdot(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}
$$

同様に,

$$
\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.
$$

よって,

$$
\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.
$$

(2) 求める値は

$$
\begin{aligned}
\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy &= \int_0^{2\pi} P(\cos t,\sin t)(\cos t)'dt \\
&\quad + \int_0^{2\pi} Q(\cos t,\sin t)(\sin t)'dt \\
&= \int_0^{2\pi}\{(-\sin t)(-\sin t)\}dt + \int_0^{2\pi}\cos t\cos t dt \\
&= \int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} dt \\
&= 2\pi.
\end{aligned}
$$