§1. Euclid 空間

Euclid 空間は微分積分や線形代数においても現れる親しみのあるものであるが, これから扱っていく曲線や曲面も基本的には Euclid 空間への写像である. ここでは Euclid 空間に関する事実を簡単にまとめておこう.
まず, 実数全体の集合を $\mathbf{R}$ と書く. 自然数 n を固定しておき, n 個の実数を横に並べたもの全体の集合を $\mathbf{R}^n$ と書く. 即ち,

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

である. $\mathbf{R}^1$ は $\mathbf{R}$ のことである. また, $\mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ をそれぞれ直線, 平面, 空間と同一視し, $\mathbf{R}^n$ の元を点ともよぶ.
$\mathbf{R}^n$ の二つの元 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ および $c \in \mathbf{R}$ に対し和 $x + y \in \mathbf{R}^n$ およびスカラー倍 $cx \in \mathbf{R}^n$ をそれぞれ

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),\ cx = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)$$

により定めると, $\mathbf{R}^n$ はベクトル空間となる. 零ベクトル 0 は $(0, 0, \ldots, 0)$ と表される元である.
更に, $\mathbf{R}^n$ の標準内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

により定められる, $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数である. 以下では標準内積を単に内積とよぶことにする. $\mathbf{R}^n$ に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を考えたものが n 次元実 Euclid 空間である. ここでは複素 Euclid 空間は考えないので, $\mathbf{R}^n$ を単に n 次元 Euclid 空間とよんでも構わない.
x と y の内積 $\langle x, y \rangle$ は行列の積を用いて $x{}^t y$ と表しておくと, 計算が容易になる場合がある. 但し, ${}^t y$ は y の転置行列である.
以下では n 次元 Euclid 空間としての $\mathbf{R}^n$ を考える.

定理 $x, y, z \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ とすると, 次の (1)〜(4) が成り立つ.
(1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
(2) $\langle cx, y \rangle = c\langle x, y \rangle$.
(3) $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$.
(4) $x \neq 0$ ならば, $\langle x, x \rangle > 0$.

$\mathbf{R}^n$ のノルム $\|\ \|$ は内積を用いて

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定められる, $\mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数である. 定義より, x の長さ $\|x\|$ は $\|x\| \geq 0$ をみたし, $\|x\| = 0$ となるのは $x = 0$ のときのみである.

定理 $x, y \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ とすると, 次の (1)〜(3) が成り立つ.
(1) $\|cx\| = |c|\|x\|$.
(2) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$ (Cauchy-Schwarz の不等式).
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (三角不等式).

証明 (2) のみ示す.
$y = 0$ のときは明らか.
$y \neq 0$ のとき,

$$\langle y, y \rangle > 0$$

に注意すると,

$$
\begin{aligned}
0 &\le \left\langle x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y, x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y \right\rangle \langle y, y\rangle \\
&= \left(\langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle + \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle^2}\langle y, y\rangle \right) \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2\|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2.
\end{aligned}
$$

よって,

$$|\langle x, y\rangle|^2 \le \|x\|^2\|y\|^2.$$

即ち,

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|.$$

□

$\mathbf{R}^2$ の 2 点 $a = (a_1, a_2)$ および $b = (b_1, b_2)$ をそれぞれ原点から a, b へ向かう平面ベクトルとみなすことにする. a, b がともに零ベクトルではないとし, これらのなす角が θ で, $0 < \theta < \pi$ とする. このとき, a, b を二辺とする三角形に対し余弦定理を用いると,

$$\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\| \cos\theta$$

だから,

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2\|a\|\|b\| \cos\theta.$$

よって,

$$\langle a, b\rangle = \|a\|\|b\| \cos\theta$$

が成り立つ. 特に, a と b が直交するのは $\langle a, b\rangle = 0$ のときである.
更に, a, b を二辺とする平行四辺形の面積は

$$
\begin{aligned}
\|a\|\|b\| \sin\theta &= \|a\|\|b\|\sqrt{1 - \cos^2\theta} \\
&= \|a\|\|b\|\sqrt{1 - \frac{\langle a, b\rangle^2}{\|a\|^2\|b\|^2}} \\
&= \sqrt{\|a\|^2\|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2} \\
&= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2} \\
&= \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|
\end{aligned}
$$

となり, 2 次の行列式を幾何学的に解釈することができる.
$\mathbf{R}^3$ の 2 点 $a = (a_1, a_2, a_3)$ および $b = (b_1, b_2, b_3)$ をそれぞれ原点から a, b へ向かう空間ベクトルとみなすことにする. 平面ベクトルの場合と同様に, a, b のなす角を θ とすると,

$$\langle a, b\rangle = \|a\|\|b\| \cos\theta$$

が成り立つ.

更に, a と b の外積 $a \times b \in \mathbf{R}^3$ は a, b が平行な場合は零ベクトルで, a, b が平行でない場合は次の (1)〜(3) をみたすように定められる.

(1) $a \times b$ は a, b と直交する.

(2) $\|a \times b\|$ は a, b を二辺とする平行四辺形の面積.

(3) $a \times b$ の向きは a が b に重なるように角 θ 回転するとき, 右ネジが進む向き.
但し, $0 < \theta < \pi$ とする.

$e_1, e_2, e_3 \in \mathbf{R}^3$ を

$$e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)$$

により定める. よく用いられる右手系とよばれる座標系を選んでおくと,

$$e_1 \times e_2 = e_3,\ e_2 \times e_3 = e_1,\ e_3 \times e_1 = e_2 \tag{$*$}$$

が成り立つ.

定理 $a, b, c \in \mathbf{R}^3$ とすると, 次の (1)〜(3) が成り立つ.
(1) $a \times b = -b \times a$.
(2) $k \in \mathbf{R}$ とすると, $(ka) \times b = a \times (kb) = k(a \times b)$.
(3) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$, $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$.

$\mathbf{R}^3$ の 2 点 $a = (a_1, a_2, a_3)$ および $b = (b_1, b_2, b_3)$ は

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3,\ b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

と表されるから, 上の定理と $(*)$ より,

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) \times (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1). \end{aligned}$$

$a, b, c \in \mathbf{R}^3$ に対し a, b, c の三重積は $\langle a \times b, c\rangle$ により定められる. a, b, c を

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3,\ b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3,\ c = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$$

と表しておくと, 上の計算より

$$\begin{aligned} \langle a \times b, c\rangle &= c_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - c_2 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + c_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad (\text{第 3 行に関する余因子展開}) \\ &= \det \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

平面ベクトルの場合と同様の計算を行うと, a, b, c を三辺とする平行六面体の体積は $|\langle a \times b, c\rangle|$ であることが分かり, 3 次の行列式を幾何学的に解釈することができる.

問題 1

1. A を n 次の実正方行列とすると, $\mathbf{R}^n$ の任意の 2 点 x, y に対し

$$\langle x, yA \rangle = \langle x {}^t A, y \rangle$$

が成り立つことを示せ.

2. $x, y \in \mathbf{R}^n$ とすると, 中線定理

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

が成り立つことを示せ.

3. 外積 $(1,2,3) \times (4,5,6)$ を求めよ.

4. $a, b, c, d \in \mathbf{R}^3$ とすると, 次の (1)〜(4) が成り立つことを示せ.
(1) $\langle a \times b, c \rangle = \langle b \times c, a \rangle = \langle c \times a, b \rangle$.
(2) $(a \times b) \times c = \langle a, c \rangle b - \langle b, c \rangle a$.
(3) $(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = 0$ (Jacobi の恒等式).
(4) $\langle a \times b, c \times d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$ (Lagrange の公式).

5. $a, b, c \in \mathbf{R}^3$ を次の (1), (2) のように定めると, a, b, c は同一直線上にはない. a, b, c を通る平面の方程式を求めよ.
(1) $a = (1,2,3)$, $b = (2,3,1)$, $c = (3,1,2)$.
(2) $a = (1,1,1)$, $b = (2,2,2)$, $c = (3,4,5)$.

問題 1 の解答

1. 内積を行列の積を用いて表すと,

$$\begin{aligned}\langle x, yA\rangle &= x^t(yA)\\ &= x({}^tA^ty)\\ &= (x^tA)^ty\\ &= \langle x^tA, y\rangle.\end{aligned}$$

2. ノルムの定義および内積の性質より,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle\\ &= \|x\|^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|^2+\|x\|^2+2\langle x,-y\rangle+\|-y\|^2\\ &= 2(\|x\|^2+\|y\|^2).\end{aligned}$$

3. 求める外積は

$$\begin{aligned}(1,2,3)\times(4,5,6) &= (2\cdot 6-3\cdot 5, 3\cdot 4-1\cdot 6, 1\cdot 5-2\cdot 4)\\ &= (-3,6,-3).\end{aligned}$$

4. (1) 行列式の性質より,

$$\det\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} b\\ c\\ a\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} c\\ a\\ b\end{pmatrix}.$$

また,

$$\langle a\times b, c\rangle = \det\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}.$$

よって,

$$\langle a\times b, c\rangle = \langle b\times c, a\rangle = \langle c\times a, b\rangle.$$

(2) $a, b, c, (a\times b)\times c$ をそれぞれ

$$(a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3), (c_1,c_2,c_3), (x,y,z)$$

とおくと,

$$(x,y,z) = (a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1)\times(c_1,c_2,c_3)$$

だから,

$$\begin{aligned}x &= (a_3b_1-a_1b_3)c_3-(a_1b_2-a_2b_1)c_2\\ &= (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)a_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= (a_1b_2-a_2b_1)c_1-(a_2b_3-a_3b_2)c_3\\ &= (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_2-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)a_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_2 - (a_3b_1 - a_1b_3)c_1 \\ &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_3. \end{aligned}$$

よって,

$$(a \times b) \times c = \langle a, c\rangle b - \langle b, c\rangle a.$$

(3) (2) より,

$$\begin{aligned} (a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b &= \langle a, c\rangle b - \langle b, c\rangle a + \langle b, a\rangle c - \langle c, a\rangle b \\ &\quad + \langle c, b\rangle a - \langle a, b\rangle c \\ &= 0. \end{aligned}$$

(4) (1), (2) より,

$$\begin{aligned} \langle a \times b, c \times d\rangle &= \langle b \times (c \times d), a\rangle \\ &= -\langle (c \times d) \times b, a\rangle \\ &= -\langle \langle c, b\rangle d - \langle d, b\rangle c, a\rangle \\ &= -\langle c, b\rangle\langle d, a\rangle + \langle d, b\rangle\langle c, a\rangle \\ &= \langle a, c\rangle\langle b, d\rangle - \langle a, d\rangle\langle b, c\rangle. \end{aligned}$$

5. (1) 法ベクトルを求めると,

$$\begin{aligned} (b - a) \times (c - a) &= (1, 1, -2) \times (2, -1, -1) \\ &= (1 \cdot (-1) - (-2)(-1), (-2) \cdot 2 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) \\ &= (-3, -3, -3). \end{aligned}$$

よって, 求める平面の方程式は

$$-3(x - 1) - 3(y - 2) - 3(z - 3) = 0.$$

即ち,

$$x + y + z = 6.$$

(2) 法ベクトルを求めると,

$$\begin{aligned} (b - a) \times (c - a) &= (1, 1, 1) \times (2, 3, 4) \\ &= (1 \cdot 4 - 1 \cdot 3, 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4, 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2) \\ &= (1, -2, 1). \end{aligned}$$

よって, 求める平面の方程式は

$$(x - 1) - 2(y - 1) + (z - 1) = 0.$$

即ち,

$$x - 2y + z = 0.$$