§2. 直交行列

Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ は内積をもつベクトル空間であるから, $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ 自身への写像の中でも, 直交変換とよばれる特別な線形変換を考えることができる. ここでは $\mathbf{R}^n$ の点は n 次の行ベクトルとするので, 直交変換は直交行列を右から掛けることに相当することに注意しよう. 線形代数においては実対称行列が直交行列によって対角化可能であることを扱うが, 直交行列は幾何学においても重要である.
A を n 次の実正方行列とする. A は

$$ {}^t\!AA = A{}^t\!A = E $$

をみたすとき, 直交行列とよぶのであった. 但し, E は n 次の単位行列である. なお, 上の式は ${}^t\!AA = E$ または $A{}^t\!A = E$ の何れか一つでもよい.
定義から直ちに分かるように, 直交行列は正則で, 逆行列は転置行列に一致する. また, 直交行列の逆行列も直交行列である.
更に, A, B をともに n 次の直交行列とすると,

$$ \begin{aligned} {}^t(AB)(AB) &= {}^t\!B{}^t\!AAB \\ &= {}^t\!BEB \\ &= {}^t\!BB \\ &= E \end{aligned} $$

だから, A, B の積 AB も直交行列である.
n 次の直交行列全体の集合を $\mathrm{O}(n)$ と書く.
上に述べたことを含め, $\mathrm{O}(n)$ に関して次のようにまとめることができる.

定理　$A, B, C \in \mathrm{O}(n)$ とすると, 次の (1)〜(4) が成り立つ.
(1) $AB \in \mathrm{O}(n)$.
(2) $(AB)C = A(BC)$ (結合律).
(3) $E \in \mathrm{O}(n)$ で, $EA = AE = A$.
(4) $A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$ で, $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

一般の集合に対しても上の定理の (1)〜(4) のような性質をもつ積を考えると, 群とよばれるものを定義することができる. $\mathrm{O}(n)$ を n 次の直交群とよぶ.
直交行列の行列式は 1 か -1 である. 実際, $A \in \mathrm{O}(n)$ とすると, 直交行列の定義と行列式の性質より,

$$ \begin{aligned} 1 &= |E| \\ &= |{}^t\!AA| \\ &= |{}^t\!A||A| \\ &= |A|^2 \end{aligned} $$

だから, $|A| = \pm 1$ である.
$\mathrm{O}(n)$ の元で行列式が 1 となるもの全体, 即ち行列式が 1 の n 次の直交行列全体の集合を $\mathrm{SO}(n)$ と書くと, $\mathrm{SO}(n)$ に関して上の定理の (1)〜(4) と同様の性質が成り立つ. $\mathrm{SO}(n)$ を n 次の特殊直交群とよぶ.
次は直交行列に関する重要な事実である.

定理　A を n 次の実正方行列とすると, 次の (1)〜(4) は同値.

(1) $A \in \mathrm{O}(n)$.
(2) 任意の $x, y \in \mathbf{R}^n$ に対し $\langle xA, yA \rangle = \langle x, y \rangle$.
(3) 任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対し $\|xA\| = \|x\|$.
(4) A の n 個の行ベクトルは $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底.

$A \in \mathrm{O}(2)$ を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と表しておくと, 直交行列の定義より,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって,

$$a^2 + b^2 = 1,\ ac + bd = 0,\ c^2 + d^2 = 1.$$

第 1 式と第 3 式より, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ をみたす θ, φ を用いて,

$$a = \cos\theta,\ b = \sin\theta,\ c = \sin\varphi,\ d = \cos\varphi$$

と表される.
第 2 式と加法公式より,

$$\sin(\theta + \varphi) = 0.$$

$0 \leq \theta + \varphi < 4\pi$ だから,

$$\theta + \varphi = 0, \pi, 2\pi, 3\pi.$$

従って,

$$(\sin\varphi, \cos\varphi) = \begin{cases} (-\sin\theta, \cos\theta) & (\theta + \varphi = 0, 2\pi), \\ (\sin\theta, -\cos\theta) & (\theta + \varphi = \pi, 3\pi) \end{cases}$$

だから,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \mp\sin\theta & \pm\cos\theta \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順}).$$

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ のとき, $x \in \mathbf{R}^2$ に A を右から掛けることは x を原点を中心として各 θ 回転することを意味する.
$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ のとき, $x \in \mathbf{R}^2$ に A を右から掛けることは x を直線 $x_2 = \left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right) x_1$ に関して対称移動することを意味する.
また,

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \, 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$$

である.

3次の直交行列について考えるため, 数の範囲を複素数まで広げることにする.
Aを正方行列とし, Aの転置と複素共役を取ることにより得られる行列をA^*と書く. 即ち, A^*はAの転置行列の各成分の複素共役を取ることにより得られる行列である.
Aは

$$A^*A = AA^*$$

となるとき, 正規行列とよぶ. 特に, 実対称行列, 実交代行列, 直交行列は正規行列である.
また, Aは

$$A^*A = AA^* = E$$

となるとき, ユニタリ行列とよぶ. 上の式は$A^*A = E$または$AA^* = E$の何れか一つでもよい. 特に, ユニタリ行列は正規行列である. n次のユニタリ行列全体の集合を$\mathrm{U}(n)$と書き, n次のユニタリ群とよぶ.

定理 Aを正方行列とする. Aがユニタリ行列によって対角化可能であるための必要十分条件はAが正規行列であること.

$A \in \mathrm{O}(n)$とすると, 上の定理より,

$$UAU^* = D$$

となる$U \in \mathrm{U}(n)$およびn次の対角行列Dが存在する.
$U \in \mathrm{U}(n)$, $A \in \mathrm{O}(n)$だから,

$$\begin{aligned} DD^* &= (UAU^*)(UAU^*)^* \\ &= UAU^*U^tAU^* \\ &= E. \end{aligned}$$

よって, Dの対角成分は絶対値1の複素数となり, それらはAの固有値でもある.
$n=3$とすると, Aの固有方程式は実数係数の3次方程式だから、Aの固有値の一つは1か-1で, 残りの二つは$0 \leq \theta < 2\pi$をみたすθを用いて, $\cos\theta \mp i\sin\theta$と表される. 但し, iは虚数単位である.
このとき, 次の(1), (2)をみたす$\mathbf{R}^3$の正規直交基底$\{u_1, u_2.u_3\}$が存在することが分かる.

(1) u_1は固有値1か-1に対するAの固有ベクトル.
(2) $u_2 \pm iu_3$は固有値$\cos\theta \mp i\sin\theta$に対する$A$の固有ベクトル. 但し, 複号同順である.

更に, $P = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$とおくと, $P \in \mathrm{O}(3)$で,

$$PA^tP = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となることが分かる.
従って, $A \in \mathrm{SO}(3)$のときは, Aは原点を通るu_1方向の直線を回転軸とする角θの回転を意味する.
以上のことから, $\mathrm{SO}(n)$を回転群ともよぶ.

問題 2

1. $a \in \mathbf{R}^n$, $a \neq 0$ とし, $x \in \mathbf{R}^n$ に対し

$$f(x) = x - \frac{2\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle} a$$

とおくと, f は $\mathbf{R}^n$ の線形変換を定める.

(1) f は $\mathbf{R}^n$ の直交変換であることを示せ.

(2) f と f 自身の合成写像 $f \circ f$ は $\mathbf{R}^n$ の恒等変換であることを示せ.

(3) $f(a) = -a$ だから, -1 は f の固有値である. W を固有値 -1 に対する f の固有空間とする. W を求めよ.

(4) $n \geq 2$ とし, $W^{\perp}$ を W の直交補空間, 即ち

$$W^{\perp} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \text{任意の } y \in W \text{ に対し } \langle x, y\rangle = 0\}$$

とする. $W^{\perp}$ は f の固有値 1 に対する固有空間であることを示せ. なお, f を W に関する鏡映とよぶ.

2. A, B を n 次の実正方行列とする. $A + iB$ がユニタリ行列であるための必要十分条件は $2n$ 次の正方行列 $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ が直交行列であることを示せ.

3. A を n 次の複素正方行列とし, A の各成分の複素共役を取ることにより得られる行列を $\overline{A}$ と書くと, 行列式に関して $\det \overline{A} = \overline{\det A}$ が成り立つ. 但し, 右辺は $\det A$ の共役複素数である. このことを用いてユニタリ行列の行列式は絶対値 1 の複素数であることを示せ.

4. 実交代行列の固有値は純虚数であることを示せ.

問題 2 の解答

1. (1) $x, y \in \mathbf{R}^n$ とすると,

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y)\rangle &= \left\langle x - \frac{2\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a, y - \frac{2\langle y, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a \right\rangle \\ &= \langle x, y\rangle - \frac{2\langle y, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\langle x, a\rangle - \frac{2\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\langle a, y\rangle + \frac{4\langle x, a\rangle\langle y, a\rangle}{\langle a, a\rangle^2}\langle a, a\rangle \\ &= \langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

よって, f は $\mathbf{R}^n$ の直交変換.

(2) $x \in \mathbf{R}^n$ とすると,

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(x) - \frac{2\langle f(x), a\rangle}{\langle a, a\rangle}a \\ &= x - \frac{2\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a - \frac{2}{\langle a, a\rangle}\left\langle x - \frac{2\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a, a \right\rangle a \\ &= x - \frac{2\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a - \frac{2\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a + \frac{4\langle x, a\rangle\langle a, a\rangle}{\langle a, a\rangle^2}a \\ &= x.\end{aligned}$$

よって, $f \circ f$ は $\mathbf{R}^n$ の恒等変換.

(3) まず, $x \in W$ とすると,

$$\begin{aligned}x &= -f(x) \\ &= -x + \frac{2\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a\end{aligned}$$

だから,

$$x = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a.$$

よって, x は $t \in \mathbf{R}$ を用いて $x = ta$ と表すことができる.
逆に, $t \in \mathbf{R}$ とすると,

$$\begin{aligned}f(ta) &= ta - \frac{2\langle ta, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a \\ &= -ta.\end{aligned}$$

従って,

$$W = \{ta | t \in \mathbf{R}\}.$$

(4) $n \geq 2$ だから, $W^\perp \neq \{0\}$ であることに注意する.
まず, $x \in W^\perp$ とすると, $a \in W$ だから,

$$\begin{aligned}f(x) &= x - \frac{2\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a \\ &= x.\end{aligned}$$

よって, x は f の固有値 1 に対する固有空間の元.

逆に, x を固有値 1 に対する f の固有空間の元とすると, 上の計算および $a \neq 0$ より,

$$\langle x, a \rangle = 0.$$

よって, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し

$$\langle x, ta \rangle = 0.$$

即ち, $x \in W^\perp$.
従って, $W^\perp$ は f の固有値 1 に対する固有空間.

2. まず,

$$\begin{aligned}(A+iB)^*(A+iB) &= ({}^tA - i{}^tB)(A+iB) \\ &= ({}^tAA + {}^tBB) + i({}^tAB - {}^tBA).\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}{}^t\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tB \\ -{}^tB & {}^tA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^tAA + {}^tBB & -({}^tAB - {}^tBA) \\ {}^tAB - {}^tBA & {}^tAA + {}^tBB \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

よって, $A + iB$ がユニタリ行列であるための必要十分条件は $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ が直交行列であることである.

3. $A \in \mathrm{U}(n)$ とすると, ユニタリ行列の定義と行列式の性質より,

$$\begin{aligned}1 &= \det E \\ &= \det(A^*A) \\ &= \det A^* \det A \\ &= \det \overline{{}^tA} \det A \\ &= \overline{\det {}^tA} \det A \\ &= \overline{\det A} \det A \\ &= |\det A|^2.\end{aligned}$$

よって, $|\det A| = 1$. 即ち, ユニタリ行列の行列式は絶対値 1 の複素数.

4. A を n 次の実交代行列とすると, A は正規行列だから,

$$UAU^* = D$$

となる $U \in \mathrm{U}(n)$ および n 次の対角行列 D が存在する.
両辺の転置と複素共役を取ると, A は実交代行列で, D は対角行列だから,

$$-UAU^* = \overline{D}.$$

よって, $D = -\overline{D}$ だから, D の対角成分は純虚数.
従って, 実交代行列の固有値は純虚数.