

## §6. 曲線の定義

区間  $I$  で定義された実数値関数  $f(x)$  を考えよう. 微分積分においても扱うように関数  $f(x)$  はグラフ

$$\{(x, f(x)) | x \in I\}$$

と同一視することができる. 関数  $f(x)$  のグラフは平面上の曲線を表すが, 平面上の曲線はグラフとして表されるものばかりではない.

まず, 2変数関数  $g(x, y)$  を用いて  $g(x, y) = 0$  をみたす点  $(x, y)$  全体の集合として曲線が表される場合がある. これを曲線の陰関数表示とよぶ.

例えば, 原点中心, 半径1の円は集合

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$$

として表されるから,

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

とおけばよい.

また, 関数  $f(x)$  のグラフの場合は

$$g(x, y) = y - f(x)$$

とおけばよい.

代数幾何とよばれる分野では複素数を変数とする多項式を用いて陰関数表示を考える.

次に, 区間から  $\mathbf{R}^2$  への写像, 即ち区間で定義された  $\mathbf{R}^2$  に値をとる関数の像として曲線が表される場合がある. これを曲線の径数表示とよぶ. 径数表示においては写像の像としての曲線とそれを表す写像を同一視することが多い.

例えば, 閉区間  $[0, 2\pi]$  から  $\mathbf{R}^2$  への写像  $F$  を

$$F(t) = (\cos t, \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定めると,  $F$  の像, 即ち集合

$$\{F(t) | t \in [0, 2\pi]\}$$

は原点中心, 半径1の円である.

また, 区間  $I$  で定義された関数  $f(x)$  のグラフの場合は  $I$  から  $\mathbf{R}^2$  への写像  $F$  を

$$F(t) = (t, f(t)) \quad (t \in I)$$

により定めればよい.

微分幾何とよばれる分野では径数表示を考えることが多い.

ここでは後者の立場で Euclid 空間内の曲線を扱い, 次のように定義する.

**定義** 区間から  $\mathbf{R}^n$  への写像を曲線とよぶ.

特に,  $n = 2$ ,  $n = 3$  のとき, それぞれ平面曲線, 空間曲線とよぶ.

微分幾何的な立場から曲線を扱う場合は, 現れる関数は微分可能である方がよい. 微分という手段を用いて曲線の曲がり具合を調べることができるからである. 以下では関数は必要に応じて微分可能であるとする.

簡単のため, 平面曲線

$$\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^2$$

を考えよう. なお, 曲線を表す写像は  $\gamma$  という記号を用いることにする.

$I$  の元を時間を表すパラメータとみなすと, 曲線  $\gamma$  は時間とともに平面上の点が動いて得られる軌跡とみなすことができる. このとき,  $\gamma$  を微分して得られる写像

$$\dot{\gamma}: I \rightarrow \mathbf{R}^2$$

を考えると, 各  $t \in I$  に対し  $\dot{\gamma}(t)$  は点  $\gamma(t)$  における速度ベクトルを表す. なお, 物理学の習慣に従い, パラメータ  $t$  に関する微分を  $\dot{\phantom{x}}$  を用いて表すことにする.

$\dot{\gamma}(t) = 0$  となる点  $\gamma(t)$  においては, 動いていた点は一旦立ち止まり, 更に時間が進むとすでに動いてきたところを逆戻りする可能性がある. 写像の像としての曲線を扱う場合にはこのような状況は除いておいた方がよい. そこで次のような曲線を考える.

**定義**  $\mathbf{R}^n$  内の曲線

$$\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^n$$

は任意の  $t \in I$  に対し  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  となるとき, 正則であるという.

以下では特に断らない限り, 正則な曲線を考え, 単に曲線とよぶことにする.

Taylor の定理より,  $\mathbf{R}^n$  内の曲線

$$\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^n$$

は  $t_0 \in I$  の近くにおいて

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \dot{\gamma}(t_0)(t - t_0) + R$$

と表すことができる. ここでは  $\gamma$  は  $t = t_0$  で少なくとも 2 回は微分可能であるとしている. また,  $R$  は剰余項である. 曲線は正則であるとしているから,  $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$  で, 剰余項を取り除いて得られる式

$$l(t) = \gamma(t_0) + \dot{\gamma}(t_0)(t - t_0) \quad (t \in \mathbf{R})$$

は曲線  $\gamma$  の  $t = t_0$  における接線の径数表示である.

**例** 区間  $I$  で定義された関数  $f(x)$  のグラフは

$$\gamma(t) = (t, f(t)) \quad (t \in I)$$

により定められる平面曲線  $\gamma$  で,

$$\dot{\gamma}(t) = (1, \dot{f}(t)).$$

特に,  $\gamma$  は正則である.

$t_0 \in I$  とすると,  $\gamma$  の  $t = t_0$  における接線の径数表示は

$$l(t) = (t_0, f(t_0)) + (1, \dot{f}(t_0))(t - t_0) \quad (t \in \mathbf{R}).$$

ここで,

$$l(t) = (x, y)$$

とおくと,

$$(x, y) = (t_0 + t - t_0, f(t_0) + \dot{f}(t_0)(t - t_0)).$$

よって,

$$y = f(t_0) + \dot{f}(t_0)(x - t_0).$$

**例 (直線)**

$\alpha, \beta \in \mathbf{R}^n$  とし, 曲線

$$\gamma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$$

を

$$\gamma(t) = \alpha t + \beta \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める.

$\alpha = 0$  のときは  $\gamma$  の像は一点  $\beta$  となるので,  $\alpha \neq 0$  としよう. このとき,  $\gamma$  は直線を表す. 直線は直感的には曲がっていないが, 定義に従えばこれも曲線である.

また,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= \alpha \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

だから,  $\gamma$  は正則である.

更に,  $\gamma$  の任意の点における接線は  $\gamma$  自身に他ならない.

**例 (楕円)**

$a, b > 0$  とする. 陰関数表示を用いて表される平面曲線

$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

を楕円とよぶ. 特に,  $a = b$  のときは原点中心, 半径  $a$  の円である.

ここで,  $t \in [0, 2\pi]$  に対し

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \frac{a^2 \cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 t}{b^2} \\ &= \cos^2 t + \sin^2 t \\ &= 1. \end{aligned}$$

よって, 径数表示を用いて平面曲線

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定めると,  $\gamma$  も同じ楕円を表す.

また,

$$\dot{\gamma}(t) = (-a \sin t, b \cos t)$$

だから,

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 &= a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t \\ &> 0. \end{aligned}$$

よって,  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  だから,  $\gamma$  は正則である.

## 問題 6

1.  $a, b > 0$  とし, 楕円

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定める.  $t_0 \in [0, 2\pi]$  とすると,  $\gamma$  の  $t = t_0$  における接線の陰関数表示は

$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{\cos t_0}{a} x + \frac{\sin t_0}{b} y = 1 \right\}$$

であることを示せ.

2.  $a, b > 0$  とする. 陰関数表示を用いて表される平面曲線

$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

を双曲線とよぶ.

径数表示を用いて平面曲線

$$\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (a \cosh t, b \sinh t) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定めると,  $\gamma$  は上の双曲線の  $x > 0$  の部分を表すことが分かる.

(1)  $\gamma$  は正則であることを示せ.

(2)  $t_0 \in \mathbf{R}$  とすると,  $\gamma$  の  $t = t_0$  における接線の陰関数表示は

$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{\cosh t_0}{a} x - \frac{\sinh t_0}{b} y = 1 \right\}$$

であることを示せ.

3.  $a \in \mathbf{R}, a \neq 0$  とする. 関数  $ax^2$  のグラフを放物線とよぶ. P をこの放物線上の任意の点とすると, P と点  $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$  の距離は P と直線  $y = -\frac{1}{4a}$  の距離に等しいことを示せ.

4.  $I$  を開区間とする. 曲線

$$\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$$

に対しある  $t_0 \in I$  が存在し,  $I$  で定義された関数  $\|\dot{\gamma}\|$  が  $t = t_0$  で最大または最小となるならば,  $\gamma(t_0)$  と  $\dot{\gamma}(t_0)$  は直交することを示せ.

5. 曲線

$$\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$$

に対し, 関数  $\|\dot{\gamma}\|$  が定数となるための必要十分条件は, 任意の  $t \in I$  に対し  $\gamma(t)$  と  $\dot{\gamma}(t)$  が直交することであることを示せ.

## 問題 6 の解答

1.  $\gamma$  の  $t = t_0$  における接線の径数表示は

$$l(t) = (a \cos t_0, b \sin t_0) + (-a \sin t_0, b \cos t_0)(t - t_0) \quad (t \in \mathbf{R}).$$

ここで,

$$l(t) = (x, y)$$

とおくと,

$$x = a \cos t_0 - (a \sin t_0)(t - t_0), \quad y = b \sin t_0 + (b \cos t_0)(t - t_0).$$

$t$  を消去すると, 陰関数表示

$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{\cos t_0}{a}x + \frac{\sin t_0}{b}y = 1 \right\}$$

を得る.

2. (1)  $t \in \mathbf{R}$  とすると,

$$\dot{\gamma}(t) = (a \sinh t, b \cosh t)$$

だから,

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t.$$

等式

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \tag{*}$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 &= (a^2 + b^2) \sinh^2 t + b^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

よって,  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  だから,  $\gamma$  は正則.

(2)  $\gamma$  の  $t = t_0$  における接線の径数表示は

$$l(t) = (a \cosh t_0, b \sinh t_0) + (a \sinh t_0, b \cosh t_0)(t - t_0) \quad (t \in \mathbf{R}).$$

ここで,

$$l(t) = (x, y)$$

とおくと,

$$x = a \cosh t_0 + (a \sinh t_0)(t - t_0), \quad y = b \sinh t_0 + (b \cosh t_0)(t - t_0).$$

(\*) より,  $t$  を消去すると, 陰関数表示

$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{\cosh t_0}{a}x - \frac{\sinh t_0}{b}y = 1 \right\}$$

を得る.

3. P の座標を  $(x, y)$  とする.

P と点  $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$  の距離を  $L$  とおくと,

$$\begin{aligned} L^2 &= (x - 0)^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2 \\ &= x^2 + y^2 - \frac{1}{2a}y + \frac{1}{16a^2} \\ &= \frac{1}{a}y + y^2 - \frac{1}{2a}y + \frac{1}{16a^2} \\ &= \left(y + \frac{1}{4a}\right)^2. \end{aligned}$$

これは P と直線  $y = -\frac{1}{4a}$  の距離の 2 乗に等しい.

4. まず,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\gamma\|^2 &= \frac{d}{dt}\langle\gamma, \gamma\rangle \\ &= \langle\dot{\gamma}, \gamma\rangle + \langle\gamma, \dot{\gamma}\rangle \\ &= 2\langle\gamma, \dot{\gamma}\rangle. \end{aligned}$$

仮定より,  $\|\gamma\|^2$  は  $t = t_0$  で最大または最小となるから,

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d}{dt}\|\gamma\|^2\right|_{t=t_0} \\ &= 2\langle\gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0)\rangle. \end{aligned}$$

よって,

$$\langle\gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0)\rangle = 0.$$

即ち,  $\gamma(t_0)$  と  $\dot{\gamma}(t_0)$  は直交する.

5. まず,  $\|\gamma\|$  が定数であると仮定すると,  $\|\gamma\|^2$  も定数.

よって,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\|\gamma\|^2 \\ &= 2\langle\gamma, \dot{\gamma}\rangle. \end{aligned}$$

従って, 任意の  $t \in I$  に対し

$$\langle\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\rangle = 0.$$

即ち,  $\gamma(t)$  と  $\dot{\gamma}(t)$  は直交する.

上の計算は逆に辿ることができるから, 任意の  $t \in I$  に対し  $\gamma(t)$  と  $\dot{\gamma}(t)$  が直交すると仮定すると,  $\|\gamma\|$  は定数.