§12. Fenchel の定理

§10 において平面閉曲線の全曲率は 2π 以上で, 全曲率が 2π となるのは卵形線のときに限ることを示した. この事実は空間閉曲線の全曲率に対する Fenchel の定理の特別な場合である.
曲率 κ の弧長により径数付けられた空間閉曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$$

に対し定積分

$$\int_a^b \kappa(s) ds$$

を γ の全曲率とよぶ. 空間曲線の曲率は定義より常に 0 以上であることに注意しよう.

Fenchel の定理 空間閉曲線の全曲率は 2π 以上で, 全曲率が 2π となるのは曲線がある平面上の卵形線のときに限る.

Fenchel の定理の証明について, 全曲率が 2π 以上となることは次の (1)〜(3) の手順で行う.

(1) 空間閉曲線を原点を通る平面に射影する. このとき, ほとんどすべての平面に対し正則な平面閉曲線が得られる.
(2) 射影して得られる平面閉曲線の全曲率を計算する.
(3) 原点を通る平面をすべて考え, (2) で計算した全曲率を足し合わせる, 即ち積分する.

以下では (1), (2) の計算を行うことにする.
まず, (2) の計算を行うための準備として, 弧長により径数付けられているとは限らない空間曲線に対し曲率の積分を計算しよう.
空間曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$$

を改めて弧長径数 s を用いて表しておき, $s \in [\alpha, \beta]$ とすると,

$$\begin{aligned}\gamma' &= \dot{\gamma}\frac{dt}{ds} \\ &= \frac{\dot{\gamma}}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

だから,

$$\gamma'' = \left(\frac{\ddot{\gamma}}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{\frac{1}{2}}} - \frac{\dot{\gamma} \langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{dt}{ds}.$$

更に,

$$\begin{aligned}\langle \gamma'', \gamma'' \rangle &= \left(\frac{\langle \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle} - 2\frac{\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle^2}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^2} + \frac{\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle^2}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^2} \right) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\langle \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle} - \frac{\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle^2}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^2} \right) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \\ &= \frac{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \langle \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle - \langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle^2}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2.\end{aligned}$$

κ を γ の曲率とすると,

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta}\kappa(s)ds &= \int_{\alpha}^{\beta}\|\gamma''(s)\|ds \\ &= \int_{\alpha}^{\beta}\langle\gamma''(s),\gamma''(s)\rangle^{\frac{1}{2}}ds \\ &= \int_{\alpha}^{\beta}\frac{\left(\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle\langle\ddot\gamma,\ddot\gamma\rangle-\langle\dot\gamma,\ddot\gamma\rangle^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle}\frac{dt}{ds}ds \\ &= \int_{a}^{b}\frac{\left(\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle\langle\ddot\gamma,\ddot\gamma\rangle-\langle\dot\gamma,\ddot\gamma\rangle^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle}dt. \qquad (*)\end{aligned}$$

次に, (1) について考えよう.
$v\in\mathbf{R}^3$ を単位ベクトルとし, 弧長により径数付けられた空間曲線

$$\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^3$$

を原点で v と直交する平面に射影して得られる曲線を γ_v とする.
このとき,

$$\gamma_v=\gamma-\langle\gamma,v\rangle v$$

だから,

$$\dot\gamma_v=\gamma'-\langle\gamma',v\rangle v.$$

よって,

$$\begin{aligned}\langle\dot\gamma_v,\dot\gamma_v\rangle &= \langle\gamma'-\langle\gamma',v\rangle v,\gamma'-\langle\gamma',v\rangle v\rangle \\ &= \langle\gamma',\gamma'\rangle-2\langle\gamma',v\rangle^2+\langle\gamma',v\rangle^2\langle v,v\rangle \\ &= 1-2\langle\gamma',v\rangle^2+\langle\gamma',v\rangle^2\cdot 1 \\ &= 1-\langle\gamma',v\rangle^2.\end{aligned}$$

ここで, ある $s\in[a,b]$ が存在し

$$\langle\dot\gamma_v(s),\dot\gamma_v(s)\rangle=0$$

となると仮定すると,

$$\langle\gamma'(s),v\rangle=\pm 1.$$

γ は弧長により径数付けられているから,

$$v=\pm\gamma'(s).$$

従って,

$$N=\{\pm\gamma'(s)|s\in[a,b]\}$$

とおくと, γ_v が正則となるのは $v\notin N$ のときである.
原点中心, 半径 1 の球面を S^2 と書くことにする. このとき, $\mathbf{R}^3$ の単位ベクトル全体の集合は S^2 と同一視することができる. N は S^2 の部分集合となるが, S^2 全体に比べると非常に小さい部分集合で, 測度論において学ぶ測度が 0 の集合となることが分かる.
更に, (2) について考えよう.
$v\notin N$ とすると,

$$\ddot\gamma_v=\gamma''-\langle\gamma'',v\rangle v$$

だから,

$$\begin{aligned}\langle \ddot{\gamma}_v, \ddot{\gamma}_v \rangle &= \langle \gamma'', \gamma'' \rangle - 2\langle \gamma'', v \rangle^2 + \langle \gamma'', v \rangle^2 \langle v, v \rangle \\ &= \langle \gamma'', \gamma'' \rangle - \langle \gamma'', v \rangle^2.\end{aligned}$$

更に,

$$\begin{aligned}\langle \dot{\gamma}_v, \ddot{\gamma}_v \rangle &= \langle \gamma' - \langle \gamma', v \rangle v, \gamma'' - \langle \gamma'', v \rangle v \rangle \\ &= \langle \gamma', \gamma'' \rangle - \langle \gamma', v \rangle \langle \gamma'', v \rangle - \langle \gamma', v \rangle \langle \gamma'', v \rangle + \langle \gamma', v \rangle \langle \gamma'', v \rangle \langle v, v \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \gamma', \gamma' \rangle' - \langle \gamma', v \rangle \langle \gamma'', v \rangle \\ &= -\langle \gamma', v \rangle \langle \gamma'', v \rangle.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\langle \dot{\gamma}_v, \dot{\gamma}_v \rangle \langle \ddot{\gamma}_v, \ddot{\gamma}_v \rangle - \langle \dot{\gamma}_v, \ddot{\gamma}_v \rangle^2 &= \left(1 - \langle \gamma', v \rangle^2\right) \left(\langle \gamma'', \gamma'' \rangle - \langle \gamma'', v \rangle^2\right) - \langle \gamma', v \rangle^2 \langle \gamma'', v \rangle^2 \\ &= \langle \gamma'', \gamma'' \rangle - \langle \gamma'', v \rangle^2 - \langle \gamma', v \rangle^2 \langle \gamma'', \gamma'' \rangle.\end{aligned}$$

γ_v を弧長径数 s_v を用いて表しておき, $s_v \in [\alpha_v, \beta_v]$ とし, κ_v を γ_v の曲率とすると, $(*)$ より,

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \kappa_v(s_v) ds_v &= \int_a^b \frac{\left(\langle \dot{\gamma}_v, \dot{\gamma}_v \rangle \langle \ddot{\gamma}_v, \ddot{\gamma}_v \rangle - \langle \dot{\gamma}_v, \ddot{\gamma}_v \rangle^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\langle \dot{\gamma}_v, \dot{\gamma}_v \rangle} ds \\ &= \int_a^b \frac{\left(\langle \gamma'', \gamma'' \rangle - \langle \gamma'', v \rangle^2 - \langle \gamma', v \rangle^2 \langle \gamma'', \gamma'' \rangle\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \langle \gamma', v \rangle^2} ds.\end{aligned}$$

ここで, γ の曲率が常に正であるとすると, γ に対する Frenet の標構 $\{e, n, b\}$ を考えることができる.
κ を γ の曲率とすると,

$$\gamma' = e, \ \gamma'' = \kappa n$$

だから,

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_v}^{\beta_v} \kappa_v(s_v) ds_v &= \int_a^b \frac{\left(\langle \kappa n, \kappa n \rangle - \langle \kappa n, v \rangle^2 - \langle e, v \rangle^2 \langle \kappa n, \kappa n \rangle\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \langle e, v \rangle^2} ds \\ &= \int_a^b \frac{\kappa \left(1 - \langle e, v \rangle^2 - \langle n, v \rangle^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \langle e, v \rangle^2} ds.\end{aligned}$$

なお, 最後の式の被積分関数の形に注意すると, $\kappa(s) = 0$ となる $s \in [a, b]$ に対しては, $n(s)$ を自由に選んでおけばよいことが分かる.
最後に, (3) について簡単に述べておこう.
γ を全曲率 μ の空間閉曲線とし, 上の計算と同じ記号を用いることにする.
まず, S^2 に対し面積要素とよばれるものを考えることができる. これを dA とおく.
また, $\mu(v)$ を γ_v の全曲率とすると,

$$\mu = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \mu(v) dA$$

が成り立つ.
この式から $\mu \geq 2\pi$ を導くことができる.

問題 12

1. 曲率 κ の弧長により径数付けられた平面曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) \quad (s \in [a, b])$$

と表しておき, 空間曲線

$$\tilde{\gamma} : [a, b] \to \mathbf{R}^3$$

を

$$\tilde{\gamma}(s) = (x(s), y(s), 0) \quad (s \in [a, b])$$

により定める.

(1) $\tilde{\gamma}$ の曲率は $|\kappa|$ であることを示せ.

(2) κ が 0 とならないとき, $\tilde{\gamma}$ の捩率は 0 であることを示せ. 特に, 空間曲線の基本定理より, 捩率が 0 の空間曲線はある平面上の曲線となることが分かる.

2. γ を曲率が 1 以下の空間閉曲線とする.

(1) γ の長さは 2π 以上であることを示せ.

(2) γ の長さが 2π となるのは, γ がある平面上の半径 1 の円のときに限ることを示せ.

3. D を $\mathbf{R}^2$ の面積確定な部分集合, $f(x, y)$ を D で C^1 級の実数値関数とすると, 関数 $f(x, y)$ のグラフとして表される曲面

$$\{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D\}$$

の曲面積は重積分

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

によりあたえられる. このとき, $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy$ を面積要素とよぶ.

次の (1), (2) の曲面の曲面積を求めよ.

(1) $a > 0$ とし, 原点中心, 半径 a の球面, 即ち

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}.$$

但し, 広義の重積分は形式的に計算してよい.

(2) $a > 0$ とし, 領域

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

で定義された関数

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad ((x, y) \in D)$$

のグラフとして表される楕円放物面の一部.

問題12の解答

1. (1) まず, γ が弧長により径数付けられているから, $\tilde{\gamma}$ も弧長により径数付けられていることに注意する.
$\{e, n\}$ を γ に対する Frenet の標構とする.
$\tilde{e} = \tilde{\gamma}'$ とおくと,

$$\begin{aligned}\tilde{e}' &= \tilde{\gamma}'' \\ &= (\gamma'', 0) \\ &= (e', 0) \\ &= (\kappa n, 0).\end{aligned}$$

よって, $\tilde{\gamma}$ の曲率は

$$\|\tilde{e}'\| = |\kappa|.$$

(2) $\{\tilde{e}, \tilde{n}, \tilde{b}\}$ を $\tilde{\gamma}$ に対する Frenet の標構とすると, (1) より,

$$\begin{aligned}\tilde{n} &= \frac{\tilde{e}'}{\|\tilde{e}'\|} \\ &= (\pm n, 0).\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\tilde{n}' &= (\pm n', 0) \\ &= (\mp\kappa e, 0) \\ &= (\mp\kappa\gamma', 0) \\ &= \mp\kappa(\gamma', 0) \\ &= \mp\kappa\tilde{e} + 0\tilde{b}.\end{aligned}$$

従って, $\tilde{\gamma}$ の捩率は 0.

2. (1) κ を γ の曲率とし, $s \in [a, b]$ を γ の弧長径数とする.
Fenchel の定理および仮定より,

$$\begin{aligned}2\pi &\leq \int_a^b \kappa(s) ds \\ &\leq \int_a^b ds \\ &= b - a.\end{aligned}$$

よって, γ の長さは 2π 以上.

(2) (1) より, γ の長さが 2π となるのは γ がある平面上の卵形線で, かつ κ が恒等的に 1 のとき, 即ち γ がある平面上の半径 1 の円のときに限る.

3. (1) この球面の $z \geq 0$ の部分はグラフとして

$$\{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D\}$$

と表される. 但し,

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 \leq a^2\}, \ f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

ここで,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

だから,

$$\begin{aligned}1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 &= 1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}\\ &= \frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}.\end{aligned}$$

また, 極座標変換を用いると, D は領域

$$E = \{(r,\theta)|0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

へ写される.
よって, 求める曲面積は $z \geq 0$ の部分の曲面積を 2 倍して,

$$\begin{aligned}2\iint_D \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}dxdy &= 2a\iint_E \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}rdrd\theta\\ &= 2a\int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr\int_0^{2\pi}d\theta\\ &= 2a\left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^a\cdot 2\pi\\ &= 4\pi a^2.\end{aligned}$$

(2) まず,

$$\begin{aligned}1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 &= 1+(2x)^2+(2y)^2\\ &= 1+4(x^2+y^2).\end{aligned}$$

また, 極座標変換を用いると, D は領域

$$E = \{(r,\theta)|0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

へ写される.
よって, 求める曲面積は

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy &= \iint_E \sqrt{1+4r^2}rdrd\theta\\ &= \int_0^a r\sqrt{1+4r^2}dr\int_0^{2\pi}d\theta\\ &= \left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a\cdot 2\pi\\ &= \frac{\pi}{6}\{(1+4a^2)^{\frac{3}{2}}-1\}.\end{aligned}$$