

## §14. 第一基本形式

空間内の曲面の接平面は2次元のベクトル空間となるが、更に自然な内積を考えることができる。このことから曲面に対し第一基本形式とよばれるものを定めることができる。

曲面

$$p : D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

に対し  $(u_0, v_0) \in D$  を固定しておく。

$\Pi$  を  $p(u_0, v_0)$  における  $p$  の接平面とすると、

$$\Pi = \{p(u_0, v_0) + p_u(u_0, v_0)(u - u_0) + p_v(u_0, v_0)(v - v_0) \mid (u, v) \in \mathbf{R}^2\}$$

で、 $\Pi$  は3次元ベクトル空間  $\mathbf{R}^3$  の2次元部分空間

$$\{p_u(u_0, v_0)u + p_v(u_0, v_0)v \mid (u, v) \in \mathbf{R}^2\}$$

と同一視することができる。以下ではこの部分空間も  $\Pi$  と書くことにする。

$\mathbf{R}^3$  の標準内積を用いて、

$$p_u(u_0, v_0)u_1 + p_v(u_0, v_0)v_1, p_u(u_0, v_0)u_2 + p_v(u_0, v_0)v_2 \in \Pi \quad ((u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbf{R}^2)$$

に対し

$$\langle p_u(u_0, v_0)u_1 + p_v(u_0, v_0)v_1, p_u(u_0, v_0)u_2 + p_v(u_0, v_0)v_2 \rangle \in \mathbf{R}$$

を対応させる。 $p_u(u_0, v_0), p_v(u_0, v_0)$  は一次独立であるから、この対応は  $\Pi$  の内積を定める。

一方、接平面の元は曲面上の曲線の微分を用いても表すことができる。

空間曲線

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$$

の像が  $p$  の像に含まれているとする。このとき、 $\gamma$  を  $p$  上の曲線とよぶ。 $\gamma$  は  $I$  から  $D$  への写像と  $p$  を合成することにより、

$$\gamma(t) = p(u(t), v(t)) \quad (t \in [a, b])$$

と表すことができる。

合成関数の微分法より、

$$\dot{\gamma} = p_u \dot{u} + p_v \dot{v}$$

だから、特に

$$c \in [a, b], \gamma(c) = p(u_0, v_0)$$

のとき、

$$u_1 = \dot{u}(c), v_1 = \dot{v}(c)$$

とおくと、

$$\dot{\gamma}(c) = p_u(u_0, v_0)u_1 + p_v(u_0, v_0)v_1$$

となる。

また、

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}\|^2 &= \langle p_u \dot{u} + p_v \dot{v}, p_u \dot{u} + p_v \dot{v} \rangle \\ &= \langle p_u, p_u \rangle \dot{u}^2 + 2\langle p_u, p_v \rangle \dot{u}\dot{v} + \langle p_v, p_v \rangle \dot{v}^2 \end{aligned}$$

だから,  $D$  で定義された関数  $E, F, G$  を

$$E = \langle p_u, p_u \rangle, \quad F = \langle p_u, p_v \rangle, \quad G = \langle p_v, p_v \rangle$$

により定めると,

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2$$

となる.

特に,  $\gamma$  の長さは

$$\int_a^b \sqrt{E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt$$

である.

上の式の根号の中身に注目し,

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

とおき, これを  $p$  の第一基本形式とよぶ.  $du^2, dudv, dv^2$  といったものには数学的な意味があるが, ここでは形式的に考えることにする.

**例** 関数のグラフを

$$p(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

と表しておく,

$$p_u = (1, 0, f_u), \quad p_v = (0, 1, f_v).$$

よって,

$$\langle p_u, p_u \rangle = 1 + f_u^2, \quad \langle p_u, p_v \rangle = f_u f_v, \quad \langle p_v, p_v \rangle = 1 + f_v^2.$$

従って,  $p$  の第一基本形式は

$$(1 + f_u^2)du^2 + 2f_u f_v dudv + (1 + f_v^2)dv^2.$$

第一基本形式は曲面上の曲線の長さを求める場合ばかりでなく, 曲面の面積を求める場合にも現れる.

曲面

$$p : D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

に対し  $\|p_u \times p_v\|dudv$  を面積要素とよぶ. また, 面積要素が  $D$  で重積分可能なとき,

$$\iint_D \|p_u \times p_v\|dudv$$

を  $p$  の面積とよぶ.

$p$  の第一基本形式を

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

とすると, 問題1においても現れた Lagrange の公式より,

$$\begin{aligned} \|p_u \times p_v\|^2 &= \langle p_u, p_u \rangle \langle p_v, p_v \rangle - \langle p_u, p_v \rangle^2 \\ &= EG - F^2. \end{aligned}$$

よって,  $p$  の面積要素は  $\sqrt{EG - F^2}dudv$  と表され, 特に  $EG - F^2$  は常に正である.

上の例より, 関数のグラフに対する面積要素は

$$\begin{aligned}\sqrt{EG - F^2}dudv &= \sqrt{(1 + f_u^2)(1 + f_v^2) - (f_u f_v)^2}dudv \\ &= \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}dudv.\end{aligned}$$

この式は問題 12 において現れたものと同じである.

### 例 (柱面)

平面曲線

$$\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておき, 曲面

$$p : D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を

$$D = I \times \mathbf{R},$$

$$p(u, v) = (x(u), y(u), v) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める.  $p$  を柱面とよぶ. 特に,  $\gamma$  が円のときは円柱である. 曲線  $\gamma$  は正則であるとしているので,

$$\begin{aligned}\text{rank} \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} &= \text{rank} \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2.\end{aligned}$$

よって,  $p$  は正則である.

また,

$$p_u \times p_v = (\dot{y}, -\dot{x}, 0)$$

だから,  $p$  の単位法ベクトルは

$$\frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|} = \frac{(\dot{y}, -\dot{x}, 0)}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

更に,

$$\langle p_u, p_u \rangle = \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \quad \langle p_u, p_v \rangle = 0, \quad \langle p_v, p_v \rangle = 1$$

だから,  $p$  の第一基本形式は

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)du^2 + 0 \cdot dudv + 1 \cdot dv^2.$$

これを

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)du^2 + dv^2$$

と書く.

従って,  $p$  の面積要素は

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dudv.$$

特に,  $\gamma$  が弧長により径数付けられているときは  $p$  の単位法ベクトル, 第一基本形式, 面積要素はそれぞれ

$$(\dot{y}, -\dot{x}, 0), \quad du^2 + dv^2, \quad dudv.$$

## 問題 14

1.  $a, b, c > 0$  とする. 楕円面の一部

$$p: D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を

$$D = (0, \pi) \times (0, 2\pi),$$

$$p(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u) \quad ((u, v) \in D)$$

により定め,  $p$  の第一基本形式を

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

とする.

(1)  $E, F, G$  を求めよ.

(2)  $a = b = c$  のとき,  $p$  の面積要素を求めよ.

2. 平面曲線

$$\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく. 但し,  $f$  は 0 とはならないとする. このとき, 曲面

$$p: D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を

$$D = I \times [0, 2\pi],$$

$$p(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める.  $p$  を回転面とよぶ.

(1)  $p$  は正則であることを示せ.

(2)  $f$  が常に正であるとき,  $p$  の単位法ベクトルを求めよ.

(3)  $p$  の第一基本形式を求めよ.

(4)  $p$  の面積要素を求めよ.

(5)  $0 < a < b$  とし,

$$f(t) = b + a \cos t, \quad g(t) = a \sin t \quad (t \in [0, 2\pi])$$

とする. このとき,  $p$  を輪環面, 円環面またはトーラスとよぶ.  $p$  の面積を求めよ.

(6)  $a, b > 0$  とし,

$$f(t) = a \cosh \frac{t}{a}, \quad g(t) = t \quad (t \in [0, b])$$

とする.  $p$  の面積を求めよ. なお,  $t$  の範囲を  $t \in \mathbf{R}$  としたときに得られる  $p$  を懸垂面またはカテノイドとよぶ.

## 問題 14 の解答

1. (1) まず,

$$p_u = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, -c \sin u), \quad p_v = (-a \sin u \sin v, b \sin u \cos v, 0).$$

よって,

$$\begin{aligned} E &= \langle p_u, p_u \rangle \\ &= a^2 \cos^2 u \cos^2 v + b^2 \cos^2 u \sin^2 v + c^2 \sin^2 u, \\ F &= \langle p_u, p_v \rangle \\ &= (b^2 - a^2) \cos u \sin u \cos v \sin v, \\ G &= \langle p_v, p_v \rangle \\ &= a^2 \sin^2 u \sin^2 v + b^2 \sin^2 u \cos^2 v. \end{aligned}$$

(2)  $a = b = c$  のとき,

$$E = a^2, \quad F = 0, \quad G = a^2 \sin^2 u.$$

よって,  $p$  の面積要素は

$$\sqrt{EG - F^2} du dv = a^2 \sin u du dv.$$

2. (1)  $(u, v) \in D$  に対し

$$x(u, v) = f(u) \cos v, \quad y(u, v) = f(u) \sin v, \quad z(u, v) = g(u)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} x_u &= f'(u) \cos v, \quad y_u = f'(u) \sin v, \quad z_u = g'(u), \\ x_v &= -f(u) \sin v, \quad y_v = f(u) \cos v, \quad z_v = 0. \end{aligned}$$

更に,

$$A = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}$$

とおくと,

$$A = f(u)f'(u), \quad B = -f(u)g'(u) \cos v, \quad C = -f(u)g'(u) \sin v.$$

$\gamma$  は正則で,  $f$  は 0 とはならないから,

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 &= (f(u))^2 (f'(u))^2 + (f(u))^2 (g'(u))^2 \cos^2 v + (f(u))^2 (g'(u))^2 \sin^2 v \\ &= (f(u))^2 \{ (f'(u))^2 + (g'(u))^2 \} \\ &> 0. \end{aligned}$$

よって,  $A, B, C$  の内の少なくとも 1 つは 0 ではない.  
従って, 任意の  $(u, v) \in D$  に対し

$$\text{rank} \begin{pmatrix} p_u(u, v) \\ p_v(u, v) \end{pmatrix} = 2.$$

即ち,  $p$  は正則.

(2) (1) の計算より,

$$\begin{aligned} p_u \times p_v &= (B, C, A) \\ &= (-f(u)g'(u) \cos v, -f(u)g'(u) \sin v, f(u)f'(u)) \\ &= f(u)(-g'(u) \cos v, -g'(u) \sin v, f'(u)). \end{aligned}$$

$f$  は常に正だから,  $p$  の単位法ベクトルは

$$\frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|} = \frac{(-g'(u) \cos v, -g'(u) \sin v, f'(u))}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}.$$

(3) (1) の計算より,

$$\langle p_u, p_u \rangle = (f'(u))^2 + (g'(u))^2, \quad \langle p_u, p_v \rangle = 0, \quad \langle p_v, p_v \rangle = (f(u))^2.$$

よって,  $p$  の第一基本形式は

$$\{(f'(u))^2 + (g'(u))^2\} du^2 + (f(u))^2 dv^2.$$

(4) (3) より,  $p$  の面積要素は

$$|f(u)|\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2} dudv.$$

(5) (4) より,  $p$  の面積は

$$\begin{aligned} \iint_D |b + a \cos u| \sqrt{(-a \sin u)^2 + (a \cos u)^2} dudv &= \iint_D a(b + a \cos u) dudv \\ &= \int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi} a(b + \cos u) dv \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} (ab + a \cos u) du \\ &= 2\pi[abu + a \sin u]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi^2 ab. \end{aligned}$$

(6) (4) より,  $p$  の面積は

$$\begin{aligned} \iint_D \left| a \cosh \frac{u}{a} \right| \sqrt{\sinh^2 \frac{u}{a} + 1^2} dudv &= \iint_D a \cosh^2 \frac{u}{a} dudv \\ &= \int_0^b du \int_0^{2\pi} a \cosh^2 \frac{u}{a} dv \\ &= 2\pi a \int_0^b \frac{1 + \cosh \frac{2u}{a}}{2} du \\ &= 2\pi a \left[ \frac{1}{2}u + \frac{a}{4} \sinh \frac{2u}{a} \right]_0^b \\ &= \frac{\pi a}{2} \left( 2b + a \sinh \frac{2b}{a} \right). \end{aligned}$$