§17. Gauss 曲率と平均曲率

ここでは曲面の曲がり具合を記述する基本的な量である Gauss 曲率と平均曲率について述べる。

曲面

\[ p : D \to \mathbb{R}^3 \]

の第一基本形式、第二基本形式をそれぞれ

\[ Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad Ldu^2 + 2Mdudv + Nd^2 \]

とする。

\[ p \] 上の曲線

\[ \gamma : I \to \mathbb{R}^3 \]

を

\[ \gamma(t) = p(u(t), v(t)) \quad (t \in I) \]

と表しておくと、§14 において扱ったように、\( \gamma \) の速度ベクトルは

\[ \dot{\gamma} = p_u \dot{u} + p_v \dot{v} \]

で、その長さの 2 乗は

\[ \| \dot{\gamma} \|^2 = E(\dot{u})^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G(\dot{v})^2 \]

によりあたえられる。

ここで、右辺は曲線 \( \gamma \) があたえられなくても、曲面 \( p \) の各点における接平面の元、即ち接ベクトルがあたえられれば定めることができることに注意しよう。

また、\( \gamma \) が弧長により径数付けられている場合、法曲率は

\[ L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2 \]

によりあたえられるから、上に述べた注意は法曲率についても同様である。更に、曲面の径数付けの方法は一通りではないが、法曲率は \( \gamma'' \) の単位法ベクトル方向の成分であるから、単位法ベクトルを \(-1\) 倍にしなければ、法曲率は径数付けを取り替えても変わらないことも注意しよう。

そこで、\((u_0, v_0) \in D\) を固定しておき、\( p(u_0, v_0) \) における法曲率の条件付き極値問題を考える。

まず、\( p(u_0, v_0) \) における接ベクトルは \( \alpha, \beta \in \mathbb{R} \) に対し

\[ w = \alpha p_u(u_0, v_0) + \beta p_v(u_0, v_0) \]

と表される。

\[ \| w \| = 1 \] とすると、

\[ E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2 = 1, \quad (\ast) \]

即ち、\( E > 0 \) だから

\[ \left( \frac{\sqrt{E}\alpha + F}{\sqrt{E}} \beta \right)^2 + \frac{EG - F^2}{E} \beta^2 = 1 \]

となる。\( E > 0, \; EG - F^2 > 0 \) だから、この式をみたす \( \alpha, \beta \) 全体は \( \alpha \beta \) 平面の楕円を表すことが分かる。

ここで、Euclid 空間の有界閉集合で定義された実数値連続関数は最大値および最小値をもつことを思い出す。楕円は平面の有界閉集合だから、法曲率を表す関数

\[ L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2 \]
§17. Gauss曲率と平均曲率

は条件(*)の下で最大値および最小値をもつ。これらを \( \kappa_1, \kappa_2 \) とおき、\( p(u_0, v_0) \)における主曲率とよぶ。また、\( \kappa_1, \kappa_2 \)をあたえるときの\( w \)の方向を主方向とよぶ。更に、\( \kappa_1 = \kappa_2 \)となるような\( p(u_0, v_0) \)を極点とよぶ。
主曲率は Lagrange の未定乗数法により求めることができる。

3 変数関数 \( \Phi(\alpha, \beta, \lambda) \) を

\[
\Phi(\alpha, \beta, \lambda) = \Lambda \alpha^2 + 2M \alpha \beta + N \beta^2 - \lambda \left( E \alpha^2 + 2F \alpha \beta + G \beta^2 - 1 \right)
\]

により定めると,

\[
\Phi_\alpha = 2\Lambda \alpha + 2M \beta - 2\lambda E \alpha - 2\lambda F \beta = 2(L - \lambda E) \alpha + 2(M - \lambda F) \beta.
\]

また,

\[
\Phi_\beta = 2M \alpha + 2N \beta - 2\lambda F \alpha - 2\lambda G \beta = 2(M - \lambda F) \alpha + 2(N - \lambda G) \beta.
\]

よって,

\[
\Phi_\alpha(\alpha, \beta, \lambda) = \Phi_\beta(\alpha, \beta, \lambda) = 0
\]

とすると、\( \alpha, \beta \)は連立一次方程式

\[
\begin{pmatrix}
L - \lambda E & M - \lambda F \\
M - \lambda F & N - \lambda G
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\alpha \\
\beta
\end{pmatrix}
= 0
\]

をみたす。
更に、(*)が成り立つとすると,

\[
\Lambda \alpha^2 + 2M \alpha \beta + N \beta^2 = (\alpha, \beta)
\begin{pmatrix}
L & M \\
M & N
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\alpha \\
\beta
\end{pmatrix}
= (\alpha, \beta) \lambda
\begin{pmatrix}
E & F \\
F & G
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\alpha \\
\beta
\end{pmatrix}
= \lambda(\alpha, \beta)
\begin{pmatrix}
E & F \\
F & G
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\alpha \\
\beta
\end{pmatrix}
= \lambda(E \alpha^2 + 2F \alpha \beta + G \beta^2)
= \lambda.
\]

また、\( \alpha, \beta \neq 0 \)となるから、上の連立一次方程式は自明でない解をもち,

\[
\begin{vmatrix}
L - \lambda E & M - \lambda F \\
M - \lambda F & N - \lambda G
\end{vmatrix}
= 0.
\]

即ち,

\[
(L - \lambda E)(N - \lambda G) - (M - \lambda F)^2 = 0
\]

だから,

\[
(EG - F^2)\lambda^2 - (EN + GL - 2FM)\lambda + LN - M^2 = 0.
\]
§17. Gauss 曲率と平均曲率

$EG - F^2 > 0$ だから、これは $\lambda$ に関する 2 次方程式である。

よって、解と係数の関係より,

$$
\kappa_1 \kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad \kappa_1 + \kappa_2 = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}.
$$

主曲率の積および平均をそれぞれ $K, H$ と書く。即ち,

$$
\begin{align*}
K &= \kappa_1 \kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \\
H &= \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}
\end{align*}
$$

である。$K, H$ をそれぞれ Gauss 曲率、平均曲率とよぶ。

特に,

$$
H^2 - K = \frac{1}{4}(\kappa_1 + \kappa_2)^2 - \kappa_1 \kappa_2
$$

$$
= \frac{1}{4}(\kappa_1 - \kappa_2)^2
$$

だから、触れ点は $H^2 = K$ となる点として特徴付けることができる。

$K > 0, K < 0, K = 0$ となる点をそれぞれ楕円点、双曲点、放物点とよぶ。$EG - F^2 > 0$ だから、

§15 の最後に示した定理より、$p$ は楕円点において凹、双曲点において鞍状である。

また、$p$ は $K$ が恒等的に 0 となるとき平坦、$H$ が恒等的に 0 となるとき極小であるという。$K_1, K_2$ をたたえる接ベクトルをそれぞれ $w_1, w_2$ とし,

$$
w_i = \alpha_ip_u(u_0, v_0) + \beta_ip_v(u_0, v_0) \quad (i = 1, 2)
$$

とおくと,

$$
\kappa_1 \langle w_1, w_2 \rangle = \kappa_1 \langle w_2, w_1 \rangle
$$

$$
= \kappa_1(\alpha_2, \beta_2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \kappa_2(\alpha_1, \beta_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}
$$

$$
= \kappa_2 \langle w_1, w_2 \rangle.
$$

よって、$\kappa_1 \neq \kappa_2$ ならば,

$$
\langle w_1, w_2 \rangle = 0.
$$

即ち、触れ点である点においては二つの主方向は互いに直交する。
問題17

1. $a > 0$ とする。原点中心、半径$a$の球面の一部

$$p : D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

を

$$D = (0, \pi) \times (0, 2\pi),$$

$$p(u, v) = (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \cos u) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める。$p$の単位法ベクトルを$v$とすると、

$$v = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

で、$p$の第一基本形式を

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

とすると、

$$E = a^2, \quad F = 0, \quad G = a^2 \sin^2 u$$

である。$p$の第二基本形式を

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

とする。
(1) $L, M, N$ を求めよ。
(2) $p$ の Gauss 曲率を求めよ。
(3) $p$ の平均曲率を求めよ。
(4) $p$ の任意の点は管点であることを示せ。なお、このような曲面は全管的であるという。

2. 関数のグラフを

$$p(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

と表しておく。§14 および§15 において扱ったように、$p$の第一基本形式、第二基本形式はそれぞれ

$$(1 + f_u^2)du^2 + 2f_u f_v dudv + (1 + f_v^2)dv^2,$$

$$\frac{f_{uu}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}du^2 + \frac{2f_{uv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}dudv + \frac{f_{vv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}dv^2$$

によりあたえられる。
(1) $p$ の Gauss 曲率を求めよ。
(2) $p$ の平均曲率を求めよ。

3. 曲面

$$p : D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

の単位法ベクトルを$v$、Gauss曲率を$K$とすると、

$$\nu_a \times \nu_v = Kp_a \times p_v$$

が成り立つことを示せ。
問題17の解答

1. (1) まず,

\[ p_u = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, -a \sin u), \quad p_v = (-a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0). \]

よって,

\[
\begin{aligned}
p_{uu} &= (-a \sin u \cos v, -a \sin u \sin v, -a \cos u), \\
p_{uv} &= (-a \cos u \sin v, a \cos u \cos v, 0), \\
p_{vv} &= (-a \sin u \cos v, -a \sin u \sin v, 0).
\end{aligned}
\]

従って,

\[
L = \langle p_{uu}, \nu \rangle \\
&= -(a \sin u \cos v) \sin u \cos v - (a \sin u \sin v) \sin u \sin v - (a \cos u) \cos u \\
&= -a,
\]

\[
M = \langle p_{uv}, \nu \rangle \\
&= -(a \cos u \sin v) \sin u \cos v + (a \cos u \cos v) \sin u \sin v + 0 \cdot \cos u \\
&= 0,
\]

\[
N = \langle p_{vv}, \nu \rangle \\
&= -(a \sin u \cos v) \sin u \cos v - (a \sin u \sin v) \sin u \sin v + 0 \cdot \cos u \\
&= -a \sin^2 u.
\]

(2) \( p \) のGauss曲率は

\[
\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{(-a)(-a \sin^2 u) - 0^2}{a^2 \cdot a^2 \sin^2 u - 0^2} = \frac{1}{a^2}.
\]

(3) \( p \) の平均曲率は

\[
\frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} = \frac{a^2(-a \sin^2 u) + (a^2 \sin^2 u)(-a) - 2 \cdot 0 \cdot 0}{2(a^2 \cdot a^2 \sin^2 u - 0^2)} = -\frac{1}{a}.
\]

(4) (2), (3) より,

\[ H^2 = K. \]

よって, \( p \) は全拗的。

2. (1) \( p \) のGauss曲率は

\[
\frac{f_{uu}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2} + 1} \frac{f_{vv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2} + 1} - \left( \frac{f_{uv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2} + 1} \right)^2 = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{(f_u^2 + f_v^2 + 1)^2}.
\]

(2) \( p \) の平均曲率は
\[
\frac{(1 + f_u^2) f_{vv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} + (1 + f_v^2) \frac{f_{uu}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} - 2 f_u f_v \frac{f_{uv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} - 2 \{(1 + f_u^2)(1 + f_v^2) - (f_u f_v)^2\}
\]

\[
\frac{f_{uu}(1 + f_v^2) - 2 f_{uv} f_u f_v + f_{vv}(1 + f_u^2)}{2(f_u^2 + f_v^2 + 1)^2}
\]

3. \(p\)の第一基本形式、第二基本形式をそれぞれ

\[Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad Ldu^2 + 2Mdudv + Nd^2\]

とすると、Weingartenの公式より,

\[
\nu_u \times \nu_v = \left(\frac{FM - GL}{EG - F^2} p_u + \frac{FL - EM}{EG - F^2} p_v\right) \times \left(\frac{FN - GM}{EG - F^2} p_u + \frac{FM - EN}{EG - F^2} p_v\right)
\]

\[
= \frac{(FM - GL)(FM - EN) - (FL - EM)(FN - GM)}{(EG - F^2)^2} p_u \times p_v.
\]

ここで、最後の式の分子は

\[
F^2 M^2 - EF MN - FGLM + EGLN - F^2 LN + FGLM + EF MN - EGM^2
\]

\[
= F^2 M^2 + EGLN - F^2 LN - EGM^2
\]

\[
= (EG - F^2)(LN - M^2).
\]

よって,

\[
\nu_u \times \nu_v = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} p_u \times p_v
\]

\[
= K p_u \times p_v.
\]