§24. 極小曲面

ここでは極小曲面, 即ち平均曲率が 0 の曲面について考えよう.
まず, 極小曲面は面積を汎関数とする変分問題の解として特徴付けることができる. よって, 極小曲面は針金の枠に張られた石鹸膜の数学的なモデルであり, これがその名の由来である.
D を $\mathbf{R}^2$ の有界領域とする. D の境界 ∂D から $\mathbf{R}^3$ への写像 w を固定しておき,

$$X = \{p : D \to \mathbf{R}^3 | p \text{ は } \partial D \text{ で } w \text{ となる曲面}\}$$

とおく.
更に, X で定義された汎関数 A を

$$A(p) = p \text{ の面積} \quad (p \in X)$$

により定める.
$p \in X$ とし,

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

を p の第一基本形式とすると,

$$A(p) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}dudv$$

である.
ν を p の単位法ベクトルとし, $\varepsilon \in \mathbf{R}$ と ∂D で 0 となる D で定義された関数 h に対し

$$\tilde{p} = p + \varepsilon h \nu$$

とおく. ε が十分小さければ, $\tilde{p} \in X$ となる.
このとき,

$$\begin{cases} \tilde{p}_u = p_u + \varepsilon h_u \nu + \varepsilon h \nu_u, \\ \tilde{p}_v = p_v + \varepsilon h_v \nu + \varepsilon h \nu_v. \end{cases}$$

Landau の記号を用いると, $\varepsilon \to 0$ のとき,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{p}_u, \tilde{p}_u \rangle &= \langle p_u, p_u \rangle + 2\varepsilon h \langle p_u, \nu_u \rangle + o(\varepsilon) \\ &= E - 2\varepsilon h L + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

但し, p の第二基本形式を

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

とおいた.
同様に,

$$\langle \tilde{p}_v, \tilde{p}_v \rangle = G - 2\varepsilon h N + o(\varepsilon).$$

また,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{p}_u, \tilde{p}_v \rangle &= \langle p_u, p_v \rangle + \varepsilon h \langle p_u, \nu_v \rangle + \varepsilon h \langle p_v, \nu_u \rangle + o(\varepsilon) \\ &= F - 2\varepsilon h M + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

よって, $\varepsilon \to 0$ のとき,

$$\langle \tilde{p}_u, \tilde{p}_u \rangle \langle \tilde{p}_v, \tilde{p}_v \rangle - \langle \tilde{p}_u, \tilde{p}_v \rangle^2 = EG - F^2 - 2\varepsilon h(EN + GL - 2FM) + o(\varepsilon)$$

だから, H を p の平均曲率とすると,

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} A(\tilde{p}) &= \iint_D \frac{-h(EN+GL-2FM)}{\sqrt{EG-F^2}} dudv \\ &= -\iint_D 2hH\sqrt{EG-F^2} dudv.\end{aligned}$$

従って, 上のような任意の $\tilde{p}$ に対し $A(\tilde{p})$ が $\varepsilon = 0$ で極値をとるならば, 変分法の基本補題より, $H = 0$ となる.
極小曲面の例としては既に問題 19, 21 において, カテノイドや Enneper の極小曲面が現れているが, 次も有名な例である.

例 (常螺旋面またはヘリコイド)
$a \neq 0$ とし, 曲面

$$p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$$

を

$$p(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av) \quad ((u,v) \in \mathbf{R}^2)$$

により定める. p を常螺旋面またはヘリコイドとよぶ.
まず,

$$p_u = (\cos v, \sin v, 0),\ p_v = (-u\sin v, u\cos v, a)$$

だから,

$$p_u \times p_v = (a\sin v, -a\cos v, u).$$

よって, p は正則で, ν を p の単位法ベクトルとすると,

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}(a\sin v, -a\cos v, u).$$

また,

$$\langle p_u, p_u \rangle = 1,\ \langle p_u, p_v \rangle = 0,\ \langle p_v, p_v \rangle = u^2 + a^2$$

だから, p の第一基本形式は

$$du^2 + (u^2+a^2)dv^2.$$

更に,

$$p_{uu} = 0,\ p_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0),\ p_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$$

だから,

$$\langle p_{uu}, \nu \rangle = 0,\ \langle p_{uv}, \nu \rangle = -\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}},\ \langle p_{vv}, \nu \rangle = 0.$$

よって, p の第二基本形式は

$$-\frac{2a}{\sqrt{u^2+a^2}} dudv.$$

従って, p の平均曲率は 0 となるから, p は極小である.

ここでは詳しくは扱わないが, 極小曲面は関数論を用いることにより, 正則関数を用いて具体的に表すことができる. これは Weierstrass-Enneper の表現公式とよばれるが, この公式から極小曲面は極小曲面のまま等長的に, 即ち第一基本形式を変えることなく, 非自明に変形可能であることが分かる. 変形によって得られる極小曲面を随伴極小曲面とよぶ. ここでは次の例を挙げるにとどめよう.

例 $t \in [0, 2\pi)$ をパラメータとし, $\mathbf{R}^2$ で定義された関数 x, y, z を

$$\begin{cases} x(u,v) = \sinh u \cos v \cos t - \cosh u \sin v \sin t, \\ y(u,v) = \sinh u \sin v \cos t + \cosh u \cos v \sin t, \\ z(u,v) = v \cos t + u \sin t, \end{cases} \qquad ((u,v) \in \mathbf{R}^2)$$

により定め, 曲面

$$p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$$

を

$$p(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad ((u,v) \in \mathbf{R}^2)$$

により定める. p は $t = 0, \pi$ のときはヘリコイドで, $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ のときはカテノイドを表す.
まず,

$$\begin{cases} p_u = (\cosh u \cos v \cos t - \sinh u \sin v \sin t, \cosh u \sin v \cos t + \sinh u \cos v \sin t, \sin t), \\ p_v = (-\sinh u \sin v \cos t - \cosh u \cos v \sin t, \sinh u \cos v \cos t - \cosh u \sin v \sin t, \cos t). \end{cases}$$

直接計算すると,

$$p_u \times p_v = (\cosh u \sin v, -\cosh u \cos v, \cosh u \sinh u).$$

よって, p は正則で, ν を p の単位法ベクトルとすると,

$$\nu = \frac{1}{\cosh u}(\sin v, -\cos v, \sinh u).$$

また,

$$\langle p_u, p_u \rangle = \cosh^2 u,\ \langle p_u, p_v \rangle = 0,\ \langle p_v, p_v \rangle = \cosh^2 u$$

となるから, p の第一基本形式は

$$(\cosh^2 u)(du^2 + dv^2).$$

特に, p の第一基本形式は t に依らない.
更に,

$$\begin{cases} p_{uu} = (\sinh u \cos v \cos t - \cosh u \sin v \sin t, \sinh u \sin v \cos t + \cosh u \cos v \sin t, 0), \\ p_{uv} = (-\cosh u \sin v \cos t - \sinh u \cos v \sin t, \cosh u \cos v \cos t - \sinh u \sin v \sin t, 0), \\ p_{vv} = (-\sinh u \cos v \cos t + \cosh u \sin v \sin t, -\sinh u \sin v \cos t - \cosh u \cos v \sin t, 0). \end{cases}$$

(u,v) が等温座標系であることに注意すると, p の各成分の Laplacian は 0 となるから, p は極小である.
または, 直接計算すると,

$$\langle p_{uu}, \nu \rangle = -\sin t,\ \langle p_{uv}, \nu \rangle = -\cos t,\ \langle p_{vv}, \nu \rangle = \sin t$$

となるから, p の第二基本形式は

$$-\sin t du^2 - 2\cos t du dv + \sin t dv^2.$$

従って, p の平均曲率は 0 となるから, p は極小である.

問題 24

1. f を区間 I で定義された実数値関数, g を区間 J で定義された実数値関数とし,

$$p : I \times J \to \mathbf{R}^3$$

を関数 $f+g$ のグラフとして表される曲面, 即ち

$$p(u,v) = (u, v, f(u)+g(v)) \quad ((u,v) \in I \times J)$$

とする. 問題 17 において扱ったことから分かるように, p の平均曲率は

$$\frac{f''(u)\{1+(g'(v))^2\} + g''(v)\{1+(f'(u))^2\}}{2\{(f'(u))^2+(g'(v))^2+1\}^{\frac{3}{2}}}$$

となる. p が極小となるときの f, g を求めよ. このときの p で平面と異なるものを Scherk の極小曲面とよぶ.

2. 弧長により径数付けられた平面曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(s) = (f(s), g(s)) \quad (s \in I)$$

と表しておく. 但し, f は常に正であるとする. このとき, 回転面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = I \times [0, 2\pi],$$

$$p(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)) \quad ((u,v) \in D)$$

により定めると, 問題 14, 15 において扱ったことから分かるように, p の第一基本形式, 第二基本形式はそれぞれ

$$du^2 + f^2 dv^2, \ (f'g'' - f''g')du^2 + fg'dv^2$$

となる.

(1) p の Gauss 曲率は $-\dfrac{f''}{f}$ であることを示せ.

(2) 以下では $g' \neq 0$ とする. p の平均曲率は $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{g'}{f} - \dfrac{f''}{g'}\right)$ であることを示せ.

(3) p が極小となるときの f, g を求めよ. 特に, 回転面であるような極小曲面は平面またはカテノイドの一部であることが分かる.

問題 24 の解答

1. p が極小となるのは

$$f''(u)\{1+(g'(v))^2\}+g''(v)\{1+(f'(u))^2\}=0,$$

即ち

$$\frac{f''(u)}{1+(f'(u))^2}=-\frac{g''(v)}{1+(g'(v))^2}$$

のとき.
ここで, 左辺は u のみの関数, 右辺は v のみの関数だから, 両辺はともに定数.
まず, 両辺が 0 のとき,

$$f=au+b,\ \ g=cv+d\ (a,b,c,d\in\mathbf{R}).$$

次に, $a\neq 0$ に対し

$$\frac{f''(u)}{1+(f'(u))^2}=a$$

とする.
$f'=\tan x$ とおくと, $x'=a$ となるから,

$$x=au+b\quad (b\in\mathbf{R}).$$

よって,

$$\begin{aligned} f&=\int\tan(au+b)du\\ &=-\frac{1}{a}\log|\cos(au+b)|+c\quad (c\in\mathbf{R}). \end{aligned}$$

同様に,

$$g=\frac{1}{a}\log|\cos(-av+d)|+e\quad (d,e\in\mathbf{R}).$$

2. (1) K を p の Gauss 曲率とすると,

$$\begin{aligned} K&=\frac{(f'g''-f''g')fg'-0^2}{1\cdot f^2-0^2}\\ &=\frac{f'g'g''-f''(g')^2}{f}. \end{aligned}$$

γ は弧長により径数付けられているから,

$$(f')^2+(g')^2=1. \tag{$*$}$$

両辺を微分すると,

$$f'f''+g'g''=0.$$

よって,

$$\begin{aligned} K&=\frac{f'(-f'f'')-f''\{1-(f')^2\}}{f}\\ &=-\frac{f''}{f}. \end{aligned}$$

(2) H を p の平均曲率とすると,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1\cdot fg' + f^2(f'g'' - f''g') - 2\cdot 0\cdot 0}{2(1\cdot f^2 - 0^2)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{g'}{f} + f'g'' - f''g'\right). \end{aligned}$$

(1) の計算より,

$$f'g'' - f''g' = -\frac{f''}{g'}.$$

よって,

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{g'}{f} - \frac{f''}{g'}\right).$$

(3) $(*)$ および (2) より, $H = 0$ とすると,

$$\begin{aligned} ff'' &= (g')^2 \\ &= 1 - (f')^2. \end{aligned}$$

即ち,

$$(ff')' = 1.$$

両辺を積分すると,

$$ff' = u + a \quad (a \in \mathbf{R}).$$

更に, 両辺を積分すると,

$$\frac{1}{2}f^2 = \frac{1}{2}u^2 + au + b \quad (b \in \mathbf{R}).$$

$-a^2 + 2b$ を改めて b とおくと,

$$f^2 = (u+a)^2 + b.$$

$f > 0$ だから,

$$f = \sqrt{(u+a)^2 + b}.$$

ここで,

$$\begin{aligned} (g')^2 &= 1 - (f')^2 \\ &= 1 - \left(\frac{u+a}{\sqrt{(u+a)^2 + b}}\right)^2 \\ &= \frac{b}{f^2} \end{aligned}$$

だから, $b > 0$.
従って,

$$\begin{aligned} g &= \pm\int \frac{\sqrt{b}}{f}du \\ &= \pm\sqrt{b}\int \frac{du}{\sqrt{(u+a)^2 + b}} \\ &= \pm\sqrt{b}\log\left\{u + a + \sqrt{(u+a)^2 + b}\right\} + c \quad (c \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$