演習問題

1. $a, b \in \mathbf{R}^3$, $a \neq 0$ とし, $x \in \mathbf{R}^3$ に対する方程式

$$a \times x = b \tag{$*$}$$

を考える.

(1) $(*)$ が解をもつならば, $\langle a, b \rangle = 0$ であることを示せ.

(2) $\langle a, b \rangle = 0$ のとき, $(*)$ の解をすべて求めよ.

2. $E + X$ が正則となる n 次の正方行列 X 全体の集合を S とおく. 但し, E は n 次の単位行列である. $X \in S$ に対し n 次の正方行列 $c(X)$ を

$$c(X) = (E - X)(E + X)^{-1}$$

により定める.

(1) $X \in S$ ならば, $c(X) \in S$ で, $c(c(X)) = X$ であることを示せ.

(2) $X \in S$ ならば, ${}^tX \in S$ で, $c({}^tX) = {}^tc(X)$ であることを示せ.

(3) X が n 次の実交代行列ならば, $X \in S$ で, $c(X) \in \mathrm{O}(n)$ であることを示せ.

(4) $X \in S$ かつ $X \in \mathrm{O}(n)$ ならば, $c(X)$ は実交代行列であることを示せ. なお, c は n 次の実交代行列全体の集合から $E + X$ が正則となる $\mathrm{SO}(n)$ の元全体の集合への全単射を定めることが分かる. c を Cayley 変換とよぶ.

(5) $a \in \mathbf{R}$ とし, 2 次の実交代行列 X を

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

により定める. $c(X)$ を求めよ.

(6) $-\pi < \theta < \pi$ をみたす θ に対し $X \in \mathrm{SO}(2)$ を

$$X = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

により定める. $X \in S$ であることを示し, $c(X)$ を求めよ.

3. F を区間 I で微分可能な正則行列に値をとる関数とすると,

$$(\det F)' = (\det F)\mathrm{tr}(F'F^{-1})$$

が成り立つことを示せ.

4. f を連続な実数値関数とすると, 正規形の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

の解は広い意味で単調, 即ち $t_1 < t_2$ ならば, $f(t_1) \leq f(t_2)$ または $f(t_1) \geq f(t_2)$ であることを示せ.

5. 微分方程式の解の一意性定理を用いることにより, 双曲線関数 $\sinh t$ の逆関数 $\sinh^{-1} t$ が $\log\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$ であることを示せ.

6. 実数を係数とする x, y の 2 次式が 0 となる点 (x, y) 全体の集合を二次曲線とよぶ.

(1) 二次曲線は 2 次の実対称行列 A と $b \in \mathbf{R}^2$ および $c \in \mathbf{R}$ を用いて,

$$\left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, (x,y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\langle b, (x,y) \rangle + c = 0 \right\}$$

と表されることを示せ.

(2) C を (1) のように表される二次曲線とし, A を 2 次の直交行列 P を用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

と対角化しておく. $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ に対し変数変換

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y)P + (x_0, y_0)$$

を行うと, C は $\tilde{x}\tilde{y}$ 平面上の二次曲線 $\tilde{C}$ へ写される. $\tilde{C}$ を (1) のように表せ.

7. $a > 0$ とし, 平面曲線

$$\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = \left(\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2} \right) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める. γ を疾走線またはシソイドとよぶ.

(1) $\dot{\gamma}(t) = 0$ となる $t \in \mathbf{R}$ を求めよ.

(2) O を原点とし, l を O を通り傾きが 0 ではない直線, C を中心 $(a, 0)$, 半径 a の円とする. 更に, $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ をそれぞれ l と γ の O とは異なる交点, l と C の O とは異なる交点, l と直線 $x = 2a$ の交点とする. このとき, 線分 OP の長さと線分 QR の長さは等しいことを示せ.

8. 曲率 κ が 0 とならない弧長により径数付けられた平面曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

に対する Frenet の標構を $\{e, n\}$ とし, 平面曲線 $\tilde{\gamma}$ を

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)} n(s) \quad (s \in I)$$

により定める. $\tilde{\gamma}$ を γ の縮閉線とよぶ.

(1) 任意の $s \in I$ に対し $\dot{\tilde{\gamma}}(s)$ は $n(s)$ と平行となることを示せ.

(2) 相異なる $s_1, s_2 \in I$ に対し γ の $s = s_1$ および $s = s_2$ における法線の交点を $p(s_1, s_2)$ とおく. このとき,

$$\lim_{s_2 \to s_1} p(s_1, s_2) = \tilde{\gamma}(s_1)$$

となることを示せ.

9. $a > 0$ とし, 平面閉曲線

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{2} a \cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\sqrt{2} a \cos t \sin t}{1 + \sin^2 t} \right) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定める. γ を連珠形またはレムニスケートとよぶ. γ は原点において自己交差する閉曲線となることが分かる.

(1) P を γ 上の任意の点とする. 2 点 $\mathrm{A}(a, 0), \mathrm{B}(-a, 0)$ に対し線分 PA の長さと線分 PB の長さの積を求めよ.

(2) $\|\dot{\gamma}\|$ を求めよ.

(3) γ の長さを Γ 関数を用いて表せ.

(4) γ の曲率を求めよ.

(5) γ の頂点を求めよ.

10. $a, b > 0$, $a \neq b$ とし, リマソン

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = ((a \cos t + b) \cos t, (a \cos t + b) \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定める. このとき,

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos t}$$

で, κ を γ の曲率とすると,

$$\kappa(t) = \frac{2a^2 + b^2 + 3ab \cos t}{(a^2 + b^2 + 2ab \cos t)^{\frac{3}{2}}}$$

である.

定積分を直接計算することにより, γ の回転数を求めよ.

11. I を 0 を含む区間,

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^3$$

を曲率 κ, 捩率 τ の弧長により径数付けられた空間曲線, $\{e, n, b\}$ を γ に対する Frenet の標構とする. Maclaurin の定理を用いることにより, γ は $s = 0$ の近くで

$$\gamma(s) = \gamma(0) + e(0)s + \frac{1}{2}\kappa(0)n(0)s^2 + \frac{1}{6}\left\{-(\kappa(0))^2 e(0) + \kappa'(0)n(0) + \kappa(0)\tau(0)b(0)\right\} s^3 + R$$

と表されることを示せ. 但し, R は剰余項である. 上の式を Bouquet の公式とよぶ.

12. 曲率 κ, 捩率 τ の弧長により径数付けられた空間閉曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$$

の像が原点中心, 半径 1 の球面に含まれているとする.

(1) $\{e, n, b\}$ を γ に対する Frenet の標構とすると, γ および τ はある関数

$$\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}$$

を用いて,

$$\gamma = -\sqrt{1 - \alpha^2}\, n + \alpha b,\ \ \tau = \frac{\alpha'}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

と表されることを示せ.

(2) 定積分

$$\int_a^b \tau(s) ds$$

の値を求めよ.

13. S^2 を原点中心, 半径 1 の球面とし, $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ に対し点 $(u, v, 0)$ と点 $(0, 0, 1)$ を通る直線が S^2 と交わる点を $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ とする.

(1) $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ を u, v の式で表せ.

(2) $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ の径数表示

$$p : \mathbf{R}^2 \to S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$$

を

$$p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad ((u, v) \in \mathbf{R}^2)$$

により定める. p は正則な曲面を定めることを示せ. なお, p の逆写像を立体射影とよぶ.

14. $r > 0$ とし, 曲率 κ, 捩率 τ の弧長により径数付けられた空間曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$$

が

$$1 - r\kappa(u)\cos v > 0 \quad (u \in [a, b],\ v \in [0, 2\pi])$$

をみたしていると仮定する. $\{e, n, b\}$ を γ に対する Frenet の標構とし, 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = [a, b] \times [0, 2\pi],$$

$$p(u, v) = \gamma(u) + r(n(u)\cos v + b(u)\sin v) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める. p を γ の周りの半径 r のチューブとよぶ.

(1) p は正則であることを示せ.

(2) p の単位法ベクトルを求めよ.

(3) p の第一基本形式を求めよ.

(4) p の面積を求めよ.

15. 第二基本形式が恒等的に 0 となる曲面は平面の一部に限ることを示せ.

16. 関数のグラフを

$$p(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

と表しておく. p に対する Christoffel の記号を求めよ.

17. 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

の Gauss 曲率, 平均曲率をそれぞれ K, H とし, $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ に対し曲面

$$\tilde{p} : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$\tilde{p} = cp$$

により定める. $\tilde{p}$ の Gauss 曲率, 平均曲率を求めよ.

18. $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ を n 次元の実内積空間, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ を V の正規直交基底とする. このとき, $\langle u_i, v_j \rangle$ を (i, j) 成分とする n 次の正方行列は直交行列であることを示せ.

19. (u, v) を曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

の等温座標系,

$$E(du^2 + dv^2)$$

を p の第一基本形式とする. また,

$$\Phi = \Phi(u, v) = (\xi, \eta)$$

を

$$\xi_u \eta_v - \xi_v \eta_u > 0$$

となる変数変換とし,

$$\tilde{p} = p \circ \Phi^{-1}$$

とおく. このとき, (ξ, η) が曲面 $\tilde{p}$ の等温座標系であると仮定する.

(1) 偏微分方程式

$$\xi_u = \eta_v, \ \xi_v = -\eta_u$$

が成り立つことを示せ. この方程式を Cauchy-Riemann の方程式とよぶ.

(2) ξ, η はともに Laplace 方程式

$$\xi_{uu} + \xi_{vv} = 0, \ \eta_{uu} + \eta_{vv} = 0$$

をみたすことを示せ.

20. A, B を n 次の正方行列とし, $\mathbf{R}^n$ に値をとる 2 変数関数 $f = f(u, v)$ を未知関数とする連立線形偏微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = fA, \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = fB \end{cases}$$

を考える.

(1) 積分可能条件を求めよ.

(2) 積分可能条件が成り立つときの解を求めよ.

21. 二つの曲面

$$p, \tilde{p} : D \to \mathbf{R}^3$$

の第一基本形式, 第二基本形式がそれぞれ等しく, それぞれ

$$e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \ Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

であるとする. このとき, ある $T \in \mathrm{SO}(3)$ および $v \in \mathbf{R}^3$ が存在し,

$$\tilde{p} = pT + v$$

となることを示せ.

22. Poincaré 上半平面に対する測地線の方程式は

$$\begin{cases} u'' - \dfrac{2}{v}u'v' = 0, \\ v'' + \dfrac{1}{v}(u')^2 - \dfrac{1}{v}(v')^2 = 0 \end{cases}$$

によりあたえられる.

(1) 関数 x, y を

$$x = \frac{u'}{v},\ y = \frac{v'}{v}$$

により定める. 上の方程式を x, y に対する連立常微分方程式で表せ.

(2) (1) で求めた方程式を条件

$$x^2 + y^2 = 1$$

の下で考え,

$$x = \cos\varphi,\ y = \sin\varphi$$

とおく. φ に対する常微分方程式を求めよ.

(3) $\cos\varphi = 0$ となる測地線を求めよ.

(4) $\cos\varphi \neq 0$ となる測地線を求めよ.

23. $L > 0$ を固定しておき,

$$X = \{\varphi : [0, L] \to \mathbf{R} | \varphi \text{ は } C^1 \text{ 級で}, \varphi(0) = \varphi(L) = 0\}$$

とおく. X で定義された汎関数 F を

$$F(\varphi) = \int_0^L \left\{(\varphi'(t))^2 - (\varphi(t))^2\right\} dt \quad (\varphi \in X)$$

により定める.

(1) Euler-Lagrange 方程式を求めよ.

(2) (1) で求めた Euler-Lagrange 方程式をみたす $\varphi \in X$ を求めよ.

24. 平坦な回転面を求めよ.