略解またはヒント

1. (1) $(*)$ の両辺と a の内積を取る.

(2) $x = -\dfrac{1}{\|a\|^2} a \times b + ta \ (t \in \mathbf{R})$.

2. (1) $E + c(X) = 2(E+X)^{-1}$ および $E - c(X) = 2X(E+X)^{-1}$ を示す.

(2) $(E-X)(E+X) = (E+X)(E-X)$ を用いる.

(3) $y \in \mathbf{R}^n$ についての連立一次方程式 $y(E+X) = 0$ が自明な解しかもたないことを示す.

(4) (2) を用いる.

(5) $c(X) = \dfrac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1-a^2 & -2a \\ 2a & 1-a^2 \end{pmatrix}$.

(6) $c(X) = \tan\dfrac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $t_0 \in I$ を固定しておき, 行列値関数 $G(t) = F(t)F(t_0)^{-1}$ を考える. G の第 i 行を g_i とおき, $(\det G)'(t_0)$ を計算する.

4. 背理法により示す. 両辺に x' を掛けて積分する.

5. 微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ を考える.

6. (1) x, y の 2 次式は $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c$ と表される.

(2) $\tilde{C} = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, (\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{A} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + 2\langle \tilde{b}, (\tilde{x}, \tilde{y}) \rangle + \tilde{c} = 0 \right\}$. 但し, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\tilde{b} = bP - (\lambda x_0, \mu y_0)$, $\tilde{c} = c - 2\langle bP, (x_0, y_0) \rangle + \lambda x_0^2 + \mu y_0^2$.

7. (1) $t = 0$.

(2) l の傾きを m とすると, P, Q, R の座標はそれぞれ $\left(\dfrac{2am^2}{1+m^2}, \dfrac{2am^3}{1+m^2} \right)$, $\left(\dfrac{2a}{1+m^2}, \dfrac{2am}{1+m^2} \right)$, $(2a, 2am)$ となる.

8. (1) $\dot{\tilde{\gamma}} = -\dfrac{\dot{\kappa}}{\kappa^2} n$ を示す.

(2) それぞれの法線を $\gamma_1(t) = \gamma(s_1) + tn(s_1)$, $\gamma_2(u) = \gamma(s_2) + un(s_2)$ と表しておくと, 交点における t, u は $\dfrac{\gamma(s_2) - \gamma(s_1)}{s_2 - s_1} = \dfrac{tn(s_1) - un(s_2)}{s_2 - s_1}$ をみたす. この式と $\gamma'(s_1)$ の内積を取り, $s_2 \to s_1$ とする.

9. (1) a^2.

(2) $f(t) = \dfrac{\sqrt{2}a\cos t}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$, $\gamma(t) = (f(t)\cos\varphi(t), f(t)\sin\varphi(t))$ とおくと, $\|\dot{\gamma}\|^2 = f^2 (\dot{\varphi})^2 + \left(\dot{f}\right)^2 = \dfrac{2a^2}{1+\sin^2 t}$.

(3) $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ の部分の 4 倍として計算する. 変数変換 $x = \sin^4 t$ を行い, B 関数を用いると, γ の長さは $\sqrt{2}aB\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$. 更に, 相補公式を用いると, $\dfrac{a}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$.

(4) (2) の記号を用いると, $\det\begin{pmatrix}\dot\gamma\\ \ddot\gamma\end{pmatrix} = f^2(\dot\varphi)^3 + f\dot f\ddot\varphi + 2\left(\dot f\right)^2\dot\varphi - f\ddot f\dot\varphi$. 更に, $f^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ 等を用いて計算すると, γ の曲率は $\dfrac{3}{\sqrt{2}a}\dfrac{\cos t}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$.

(5) $(\pm\sqrt{2}a, 0)$.

10. $a > b$ のとき 2, $a < b$ のとき 1.

11. $\gamma' = e$, $\gamma'' = \kappa n$, $\gamma''' = -\kappa^2 e + \kappa' n + \kappa\tau b$ を用いる.

12. (1) γ を e, n, b の一次結合で表しておき, $\langle\gamma,\gamma\rangle = 1$ および Frenet-Serret の公式を用いる.
(2) 0.

13. (1) $x(u,v) = \dfrac{2u}{u^2+v^2+1}$, $y(u,v) = \dfrac{2v}{u^2+v^2+1}$, $z(u,v) = \dfrac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}$.
(2) p の Jacobi 行列の階数が各点において 2 であることを示す.

14. (1) p の Jacobi 行列の階数が各点において 2 であることを示す.
(2) $-(n(u)\cos v + b(u)\sin v)$.
(3) $\{(1 - r\kappa(u)\cos v)^2 + r^2\tau^2(u)\}\,du^2 + 2r^2\tau(u)dudv + r^2dv^2$.
(4) $2\pi r(b-a)$.

15. 平面の一部の第二基本形式が 0 となることは容易. 逆は単位法ベクトルが一定であることを示す.

16. $\Gamma^u_{uu} = \dfrac{f_u f_{uu}}{f_u^2+f_v^2+1}$, $\Gamma^u_{uv} = \Gamma^u_{vu} = \dfrac{f_u f_{uv}}{f_u^2+f_v^2+1}$, $\Gamma^u_{vv} = \dfrac{f_u f_{vv}}{f_u^2+f_v^2+1}$, $\Gamma^v_{uu} = \dfrac{f_v f_{uu}}{f_u^2+f_v^2+1}$,
$\Gamma^v_{uv} = \Gamma^v_{vu} = \dfrac{f_v f_{uv}}{f_u^2+f_v^2+1}$, $\Gamma^v_{vv} = \dfrac{f_v f_{vv}}{f_u^2+f_v^2+1}$.

17. Gauss 曲率は $\dfrac{1}{c^2}K$, 平均曲率は $\dfrac{1}{c}H$.

18. $v_j = \sum\limits_{i=1}^{n}\langle u_i, v_j\rangle u_i$ に注意し, $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$ を用いる.

19. (1) 仮定より, $\xi_u^2 + \eta_u^2 = \xi_v^2 + \eta_v^2$, $\xi_u\xi_v + \eta_u\eta_v = 0$ が成り立つ. これらを解く.
(2) Cauchy-Riemann の方程式を用いる.

20. (1) $AB = BA$.
(2) $x_0\exp(uA + vB)$. 但し, $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

21. $p, \tilde p$ の単位法ベクトルをそれぞれ $\nu, \tilde\nu$ とし, $f = \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \\ \nu \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} \tilde p_u \\ \tilde p_v \\ \tilde\nu \end{pmatrix}$ とおくと, $g^{-1}f$ は 3 次の直交行列に値をとる. 更に, $(g^{-1}f)_u = (g^{-1}f)_v = 0$ を示す.

22. (1) $x' - xy = 0$, $y' + x^2 = 0$.
(2) $\varphi' + \cos\varphi = 0$.
(3) 上半平面上の v 軸に平行な半直線の一部.
(4) $C \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $u_0 \in \mathbf{R}$ とすると, $u = -C\sin\varphi + u_0$, $v = C\cos\varphi$ と表されるから, 求める測地線は u 軸上の点を中心とする上半円の一部.

23. (1) $\varphi'' + \varphi = 0$.
(2) n を自然数とすると, $L = n\pi$ のときは $\varphi = C \sin t$ ($C \in \mathbf{R}$), $L \neq n\pi$ のときは $\varphi = 0$.

24. 平面または円錐の一部