§1. ベクトル空間

実数全体を $\mathbf{R}$ と書く．また, 実数を縦に n 個並べたもの全体を $\mathbf{R}^n$ と書く．即ち, $\mathbf{R}^n$ は実数を成分とする n 次の列ベクトル全体で,

$$\mathbf{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R} \right\}$$

である．微分積分では実数を横に並べることが多いが, 線形代数では列ベクトルに左から行列を掛けることが多いため, $\mathbf{R}^n$ は上のように表すことにする．
$\mathbf{R}^n$ は単なる集合に留まらず, その他に様々な構造を付け加えることが可能である．ここでは次のように定義される線形空間またはベクトル空間とよばれるものを考える．

定義　V を集合とし, $u, v, w \in V$, $a, b \in \mathbf{R}$ とする．V に和とよばれる演算

$$u + v \in V$$

およびスカラー倍とよばれる演算

$$au \in V$$

が定められ, 次の (1)〜(8) が成り立つとき, V をベクトル空間とよぶ．

(1) $u + v = v + u$ (交換律).
(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (結合律).
(3) ある $0 \in V$ が存在し, 任意の u に対し $u + 0 = 0 + u = u$ が成り立つ.
(4) $a(bu) = (ab)u$ (結合律).
(5) $(a + b)u = au + bu$ (分配律).
(6) $a(u + v) = au + av$ (分配律).
(7) $1u = u$.
(8) $0u = 0$.

ベクトル空間としての V の元をベクトルとよぶことがある．また, (3) におけるベクトル 0 を零ベクトルとよぶ.

上の定義では a, b を実数としているので, 厳密には V を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とよぶのであるが, 以下では $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間等を考えることはほとんどない．但し, $\mathbf{C}$ は複素数全体である.

注意　零ベクトルも数の零も同じ記号 0 を用いるが, 文脈から判断して区別すること．例えば, (8) の式において左辺の $0u$ の 0 は実数 0 のことであるが, 右辺の 0 は零ベクトル 0 のことである. また, (2) より, $(u + v) + w$ および $u + (v + w)$ はともに

$$u + v + w$$

と書いても構わない．通常の数の足し算と同様である.

例 (数ベクトル空間)
$\mathbf{R}^n$ は行列としての和およびスカラー倍により, ベクトル空間となる．このとき, $\mathbf{R}^n$ を数ベクトル空間とよぶ.

次のような例も上の定義をみたすから, 立派なベクトル空間である.

例　実数係数の x の多項式全体を $\mathbf{R}[x]$ と書くことにする. $\mathbf{R}[x]$ は通常の多項式の和およびスカラー倍により, ベクトル空間となる. 例えば,

$$1+x, 2x+3x^2 \in \mathbf{R}[x]$$

であるが, これらに対して和やスカラー倍は

$$(1+x)+(2x+3x^2)=1+3x+3x^2,\ 4(1+x)=4+4x$$

のように定められる.

ベクトル空間に関する基本的な事実をいくつか述べておく. 以下では, V をベクトル空間とする.

命題　零ベクトルは一意的.

証明　$0, 0'$ をともに V の零ベクトルとすると,

$$\begin{aligned} 0' &= 0'+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

だから, 零ベクトルは一意的である. ここで, 最初の等号では 0 を零ベクトルとみなし, 次の等号では $0'$ を零ベクトルとみなした. □

$u \in V$ に対し $u+u'=0$ をみたす $u' \in V$ を u の逆ベクトルとよぶ.

命題　逆ベクトルは一意的に存在する.

証明　$u \in V$ とする.
まず, 存在についてであるが,

$$\begin{aligned} u+(-1)u &= 1u+(-1)u \\ &= \{1+(-1)\}u \\ &= 0u \\ &= 0 \end{aligned}$$

だから, $(-1)u$ は u の逆ベクトルとなる.
次に, 一意性についてであるが, u', u'' をともに u の逆ベクトルとすると,

$$\begin{aligned} u'' &= 0+u'' \\ &= (u+u')+u'' \\ &= (u'+u)+u'' \\ &= u'+(u+u'') \\ &= u'+0 \\ &= u' \end{aligned}$$

だから, 逆ベクトルは一意的である. □

注意　通常の数の演算の場合と同様に, u の逆ベクトルを $-u$ と書く. 更に, $u+(-v)$ を $u-v$ と書く.

また, ベクトル空間の定義において, (8) は逆ベクトルが存在することに置き換えてもよい. 実際, $u \in V$ とすると, (5) の分配律より,

$$\begin{aligned} 0u + 0u &= (0+0)u \\ &= 0u \end{aligned}$$

が成り立つが, ここで $0u$ の逆ベクトル $-0u$ を最初と最後の式に加えると, (8) が得られる.

一つベクトル空間があると, その部分集合として部分空間とよばれるベクトル空間を考えることができる.

定義　W をベクトル空間 V の部分集合とする. W は V の和およびスカラー倍により, ベクトル空間となるとき, V の部分空間とよぶ.

定理　W がベクトル空間 V の部分空間となることと次の (1)〜(3) が成り立つこととは同値.

(1) $0 \in W$.
(2) $u, v \in W$ ならば, $u + v \in W$.
(3) $c \in \mathbf{R}$, $u \in W$ ならば, $cu \in W$.

上の定理の条件は三つしかなくて少なく感じるかもしれないが, W をベクトル空間の部分集合としているおかげで, ベクトル空間の定義における八つの性質がすべて導かれるのである.

注意　上の定理の (1) は

(1)' W は空でない.

に置き換えてもよい. 実際, (1) から (1)' が導かれることは明らかである. 逆に, (1)' を仮定すると, ある $w \in W$ が存在するから, ベクトル空間の定義の (8) と上の定理の (3) より,

$$0 = 0w \in W.$$

よって, (1) が示された.

例　0 以上の整数 n を固定しておき, 高々n 次の実数係数の x の多項式全体を $\mathbf{R}[x]_n$ と書くことにする. 例えば,

$$\mathbf{R}[x]_0 = \{a | a \in \mathbf{R}\},\ \mathbf{R}[x]_1 = \{a + bx | a, b \in \mathbf{R}\},\ \mathbf{R}[x]_2 = \{a + bx + cx^2 | a, b, c \in \mathbf{R}\}$$

である.
このとき, $\mathbf{R}[x]_n$ は上の例に現れた $\mathbf{R}[x]$ の部分空間となる.

例 (同次形の連立一次方程式の解空間)
A を $m \times n$ 行列とする. なお, 特に断らない限り, 行列の成分は実数であるとする. 数ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ の部分集合 W を同次形の連立一次方程式 $Ax = 0$ の解全体として定める. 即ち,

$$W = \{x \in \mathbf{R}^n | Ax = 0\}$$

である. なお, $Ax = 0$ の 0 は $\mathbf{R}^m$ の零ベクトルである.
このとき, W は $\mathbf{R}^n$ の部分空間となることが分かる. W を同次形の連立一次方程式 $Ax = 0$ の解空間とよぶ. 線形代数では空間という言葉を使うことによって, 単なる集合ではなくベクトル空間の構造も兼ね備えていることを強調するのである.

問題 1

1. 実数を成分とする $m \times n$ 行列全体を $M_{m,n}(\mathbf{R})$ と書くことにする. $M_{m,n}(\mathbf{R})$ は行列としての和およびスカラー倍により, ベクトル空間となる. 例えば, $M_{m,n}(\mathbf{R})$ の零ベクトルとは零行列 O のことである. $A \in M_{k,l}(\mathbf{R})$, $B \in M_{m,n}(\mathbf{R})$, $C \in M_{k,n}(\mathbf{R})$ を固定しておき, $M_{l,m}(\mathbf{R})$ の部分集合 W を

$$W = \{X \in M_{l,m}(\mathbf{R}) | AXB = C\}$$

により定める. W が $M_{l,m}(\mathbf{R})$ の部分空間となるのはどのようなときか調べよ.

2. 実数を成分とする n 次の正方行列全体からなるベクトル空間を $M_n(\mathbf{R})$ と書くことにする. $M_n(\mathbf{R})$ の部分集合 W を

$$W = \{X \in M_n(\mathbf{R}) || X| = 0\}$$

により定める. W が $M_n(\mathbf{R})$ の部分空間となるかどうかを調べよ.

3. W_1, W_2 をベクトル空間 V の部分空間とする.
(1) V の部分集合

$$W_1 \cap W_2 = \{u \in V | u \in W_1 \text{ かつ } u \in W_2\}$$

は V の部分空間となることを示せ.
(2) V の部分集合 $W_1 + W_2$ を

$$W_1 + W_2 = \{u + v | u \in W_1,\ v \in W_2\}$$

により定める. $W_1 + W_2$ は V の部分空間となることを示せ.
(3) V の部分集合

$$W_1 \cup W_2 = \{u | u \in W_1 \text{ または } u \in W_2\}$$

が V の部分空間となるならば, $W_1 \subset W_2$ または $W_2 \subset W_1$ が成り立つことを示せ.

問題 1 の解答

1. まず, W が $M_{l,m}(\mathbf{R})$ の部分空間であると仮定する.
このとき, W は零行列を含むから, C は零行列である.
逆に, C が零行列であると仮定する.
このとき,

$$W = \{X \in M_{l,m}(\mathbf{R}) | AXB = O\}$$

と表される.
まず, 明らかに W は零行列を含む.
次に, $X, Y \in W$ とすると,

$$\begin{aligned} A(X+Y)B &= AXB + AYB \\ &= O + O \\ &= O \end{aligned}$$

だから,

$$X + Y \in W.$$

更に, $c \in \mathbf{R}$, $X \in W$ とすると,

$$\begin{aligned} A(cX)B &= c(AXB) \\ &= cO \\ &= O \end{aligned}$$

だから,

$$cX \in W.$$

よって, W は $M_{l,m}(\mathbf{R})$ の部分空間.
以上より, W が $M_{l,m}(\mathbf{R})$ の部分空間となるのは C が零行列のときに限る.

2. 対角成分以外と (n,n) 成分が 0 で, その他の対角成分が 1 の $M_n(\mathbf{R})$ の元を X_1, (n,n) 成分が 1 で, その他の成分が 0 の $M_n(\mathbf{R})$ の元を X_2 とする.
このとき,

$$|X_1| = |X_2| = 0$$

だから,

$$X_1, X_2 \in W.$$

しかし, $X_1 + X_2$ は単位行列だから,

$$|X_1 + X_2| = 1.$$

よって,

$$X_1 + X_2 \notin W.$$

従って, W は $M_n(\mathbf{R})$ の部分空間ではない.

3. (1) まず,

$$0 \in W_1, \ 0 \in W_2$$

だから,

$$0 \in W_1 \cap W_2.$$

次に, $u, v \in W_1 \cap W_2$ とすると,

$$u + v \in W_1,\ u + v \in W_2$$

だから,

$$u + v \in W_1 \cap W_2.$$

更に, $c \in \mathbf{R}$, $u \in W_1 \cap W_2$ とすると,

$$cu \in W_1,\ cu \in W_2$$

だから,

$$cu \in W_1 \cap W_2.$$

よって, $W_1 \cap W_2$ は V の部分空間.

(2) まず,

$$0 \in W_1,\ 0 \in W_2.$$

だから,

$$0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2.$$

次に, $u_1 + v_1, u_2 + v_2 \in W_1 + W_2$, $u_1, u_2 \in W_1$, $v_1, v_2 \in W_2$ とすると,

$$u_1 + u_2 \in W_1,\ v_1 + v_2 \in W_2$$

だから,

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \in W_1 + W_2.$$

更に, $c \in \mathbf{R}$, $u + v \in W_1 + W_2$, $u \in W_1$, $v \in W_2$ とすると,

$$cu \in W_1,\ cv \in W_2$$

だから,

$$c(u + v) = cu + cv \in W_1 + W_2.$$

よって, $W_1 + W_2$ は V の部分空間.

(3) 対偶を示す. 即ち, $W_1 \not\subset W_2$ かつ $W_2 \not\subset W_1$ ならば, $W_1 \cup W_2$ は V の部分空間とならないことを示す.
$W_1 \not\subset W_2$ より, $u \notin W_2$ となる $u \in W_1$ が存在する.
また, $W_2 \not\subset W_1$ より, $v \notin W_1$ となる $v \in W_2$ が存在する.
ここで, $u + v \in W_1 \cup W_2$ となると仮定する.
このとき, $u + v \in W_1$ または $u + v \in W_2$.
$u + v \in W_1$ のとき, W_1 は V の部分空間で $u \in W_1$ だから,

$$v = (u + v) - u \in W_1.$$

これは矛盾.
同様に, $u + v \in W_2$ のときも矛盾が導かれる.
よって, $u + v \notin W_1 \cup W_2$ だから, $W_1 \cup W_2$ は V の部分空間とならない.