§2. 一次独立と一次従属

ここではベクトル空間に関して基本的な一次独立および一次従属とよばれる概念を中心に説明していく. なお, 「一次」という言葉は「線形」という言葉に置き換えられることもある. 例えば, 一次独立を線形独立ということもある.

定義　V をベクトル空間とし, $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$, $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbf{R}$ とする.
式

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_mu_m$$

を $u_1, u_2, \ldots, u_m$ の一次結合とよぶ.
等式

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_mu_m = 0$$

が成り立つとき, これを $u_1, u_2, \ldots, u_m$ の一次関係とよぶ.
$u_1, u_2, \ldots, u_m$ は自明な一次関係しかもたないとき, 即ち上の一次関係が成り立つのは

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$$

の場合に限るとき, 一次独立であるという.
$u_1, u_2, \ldots, u_m$ は一次独立でないとき, 一次従属であるという.

例 (基本ベクトル)
数ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ のベクトル $e_1, e_2, \ldots, e_n$ を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ \ldots, \ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

により定める. 即ち, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し e_i は第 i 成分が 1 で, その他の成分が 0 のベクトルである. これらを基本ベクトルとよぶ.
このとき, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ は１次独立である. 実際, 一次関係

$$c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n = 0$$

が成り立つとすると, 左辺を計算して成分を比較することにより,

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

が得られ, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ は自明な一次関係しかもたない.

例　高々 n 次の実数係数の x の多項式全体からなるベクトル空間 $\mathbf{R}[x]_n$ に対し, $n+1$ 個のベクトル

$$1, x, x^2, \ldots, x^n$$

は一次独立である.

命題　ベクトル空間のベクトル u が一次従属であるための必要十分条件は $u = 0$.

証明　まず, u が一次従属であると仮定する.
このとき, 0 でない $c \in \mathbf{R}$ が存在し,

$$cu = 0.$$

よって,

$$\begin{aligned} 0 &= c^{-1}0 \\ &= c^{-1}(cu) \\ &= (c^{-1}c)u \\ &= 1u \\ &= u. \end{aligned}$$

即ち,

$$u = 0.$$

逆に, $u = 0$ とすると,

$$1u = 0.$$

よって, u は一次従属. □

上の命題の対偶を考えると, ベクトル空間のベクトル u が一次独立であるための必要十分条件は $u \neq 0$ ということになる.
さて, V をベクトル空間とし, $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$ とする. このとき, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ の一次結合を用いて, 次のように V の部分集合を定めることができる.
W を $u_1, u_2, \ldots, u_m$ の一次結合全体とする. 即ち,

$$W = \{c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_mu_m | c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbf{R}\}$$

である. このとき, W は V の部分空間となることが分かる. W を $u_1, u_2, \ldots, u_m$ で生成される V の部分空間とよぶ. これを

$$W = \langle u_1, u_2, \ldots, u_m \rangle_{\mathbf{R}}$$

と書くことにする.

例 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ を $\mathbf{R}^n$ の基本ベクトルとすると,

$$\mathbf{R}^n = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle_{\mathbf{R}}.$$

$\mathbf{R}^n$ の n 個のベクトルが一次独立であるか一次従属であるかの判定は行列式の計算に帰着させることができる.

定理 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}^n$ とする. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が一次独立であるための必要十分条件は

$$|a_1, a_2, \ldots, a_n| \neq 0.$$

証明 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が一次独立であるとは, これらが自明な一次関係しかもたないことであるから, 言い換えると, $x \in \mathbf{R}^n$ についての連立一次方程式

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)x = 0$$

が自明な解しかもたないことである. これは

$$|a_1, a_2, \ldots, a_n| \neq 0$$

と同値である. □

例 $\mathbf{R}^2$ のベクトル a_1, a_2 を

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

により定めると,

$$\begin{aligned} |a_1, a_2| &= 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \\ &= -2 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

よって, a_1, a_2 は一次独立.

例 $\mathbf{R}^3$ のベクトル a_1, a_2, a_3 を

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

により定めると, Sarrus の方法より,

$$\begin{aligned} |a_1, a_2, a_3| &= 0 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= 12 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

よって, a_1, a_2, a_3 は一次独立.

例 $\mathbf{R}^4$ のベクトル a_1, a_2, a_3, a_4 を

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

により定めると,

$$\begin{aligned} |a_1, a_2, a_3, a_4| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって, a_1, a_2, a_3, a_4 は一次従属.

問題 2

1. 次のベクトルが一次独立であるか一次従属であるかを調べよ.

(1) $\mathbf{R}^3$ のベクトル

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(2) $\mathbf{R}^4$ のベクトル

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) $\mathbf{R}^2$ のベクトル

$$a_1 = \begin{pmatrix} 101 \\ 102 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 103 \\ 104 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 105 \\ 106 \end{pmatrix}.$$

2. A を n 次の正方行列とする. $A^m = O$ となる 2 以上の整数 m が存在し, 更にある $x \in \mathbf{R}^n$ に対し $A^{m-1}x \neq 0$ となるとする.

(1) $x, Ax, \ldots, A^{m-1}x$ は一次独立であることを示せ.

(2) $m \leq n$ であることを示せ.

(3) $m = n = 3$ のとき,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる 3 次の正則行列 P が存在することを示せ.

問題 2 の解答

1. (1) 行列式を計算すると,

$$\begin{aligned}|a_1, a_2, a_3| &= 2\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 1\\ &= 4\\ &\neq 0.\end{aligned}$$

よって, a_1, a_2, a_3 は一次独立.

(2) $x \in \mathbf{R}^3$ についての連立一次方程式

$$(a_1, a_2, a_3)x = 0$$

が自明な解しかもたないかどうかを調べればよい.
係数行列の基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 行} - \text{第 2 行} \times 3]{\text{第 3 行} - \text{第 2 行} \times 2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 3 & -6\\ 0 & 2 & -8\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 行} - \text{第 1 行} \times 2]{\text{第 3 行} - \text{第 1 行} \times 3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -12\\ 0 & 0 & -12\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 4 行} - \text{第 3 行}]{\text{第 1 行 と 第 2 行の入れ替え}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -12\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行} \times \left(-\frac{1}{12}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 行} - \text{第 3 行} \times 2]{\text{第 1 行} - \text{第 3 行} \times 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

だから,

$$\operatorname{rank}(a_1, a_2, a_3) = 3.$$

よって, 上の連立一次方程式は自明な解しかもたない.
従って, a_1, a_2, a_3 は一次独立.

(3) a_1, a_2, a_3 は $\mathbf{R}^2$ のベクトルだから,

$$\operatorname{rank}(a_1, a_2, a_3) \leq 2.$$

よって, $x \in \mathbf{R}^3$ についての連立一次方程式

$$(a_1, a_2, a_3)x = 0$$

は自明でない解をもつ.
従って, a_1, a_2, a_3 は一次従属.

2. (1) $x, Ax, \ldots, A^{m-1}x$ の一次関係

$$c_1 x + c_2 Ax + \cdots + c_m A^{m-1}x = 0 \quad (c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbf{R}) \tag{$*$}$$

を考える.

まず, $(*)$ の両辺に左から A^{m-1} を掛けると, $A^m = O$ だから,

$$c_1 A^{m-1} x = 0.$$

$A^{m-1}x \neq 0$ だから, $A^{m-1}x$ は一次独立.
よって,

$$c_1 = 0.$$

次に,

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_l = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, m-1)$$

が成り立つと仮定する.
$(*)$ の両辺に左から A^{m-l-1} を掛けると, 上と同様に,

$$c_{l+1} = 0.$$

従って,

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0.$$

即ち, $x, Ax, \ldots, A^{m-1}x$ は一次独立.

(2) (1) より, $y \in \mathbf{R}^m$ に対する連立一次方程式

$$(x, Ax, \ldots, A^{m-1}x)y = 0$$

は自明な解しかもたない.
また, 上の連立一次方程式の係数行列は $n \times m$ 行列.
よって,

$$\begin{aligned} m &= \operatorname{rank}(x, Ax, \ldots, A^{m-1}x) \\ &\leq n. \end{aligned}$$

(3) 3 次の正方行列 P を

$$P = (A^2x, Ax, x)$$

により定める.
(1) より, $|P| \neq 0$ だから, P は正則.
ここで,

$$\begin{aligned} AP &= (A^3x, A^2x, Ax) \\ &= (0, A^2x, Ax) \\ &= (A^2x, Ax, x) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$