§3. 基底と次元

ベクトル空間があたえられると, それを生成するベクトル達の中で効率のよいものを考えることができるが, これが基底とよばれるもののおおざっぱな説明である. 基底の概念を使って, ベクトル空間に対して次元とよばれる固有の量を定義することができる. これはベクトル空間のベクトルを指定するのに必要な座標の数のようなものである. ベクトル空間には有限次元のものと無限次元のものがあるが, 線形代数では主に有限次元のベクトル空間を扱うため, 基底は次のように定義する.

定義　V をベクトル空間とし, $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$ とする. 組 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ は次の (1), (2) をみたすとき, V の基底とよぶ.

(1) $u_1, u_2, \ldots, u_n$ は一次独立.
(2) V は $u_1, u_2, \ldots, u_n$ で生成される.

例 (標準基底)
$e_1, e_2, \ldots, e_n$ を $\mathbf{R}^n$ の基本ベクトルとする. §2 において扱ったように, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ は一次独立で,

$$\mathbf{R}^n = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle_{\mathbf{R}}$$

が成り立つ. よって, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ は $\mathbf{R}^n$ の基底である. これを標準基底とよぶ.

例　$\mathbf{R}^2$ のベクトル a_1, a_2 を

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

により定めると, §2 において計算したように, $|a_1, a_2| = -2$ だから, a_1, a_2 は一次独立である.
ここで, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ が a_1, a_2 の一次結合で

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 a_1 + c_2 a_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R})$$

と表されるかどうかを調べよう. この式は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

と書き直すことができるから, 左から $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$ を掛けて,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2x_1 + \frac{3}{2}x_2 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. よって, $\mathbf{R}^2$ は a_1, a_2 で生成される.
従って, $\{a_1, a_2\}$ は $\mathbf{R}^2$ の基底である.

上の例からも分かるように, 一つのベクトル空間に対する基底は一通りではなく, 様々なものが考えられる. しかし, 実は次が成り立つのである.

定理　ベクトル空間が基底をもつならば, 基底に含まれるベクトルの個数は基底の選び方に依存しない.

V を基底をもつベクトル空間とする. 基底に含まれるベクトルの個数を V の次元とよび, $\dim V$ と書く.

例　$\mathbf{R}^n$ の次元については標準基底を考えるのが易しい. $\mathbf{R}^n$ の標準基底は n 個の基本ベクトルからなる. よって,

$$\dim \mathbf{R}^n = n.$$

例　実数を成分とする $m \times n$ 行列全体からなるベクトル空間 $M_{m,n}(\mathbf{R})$ を考える. (i,j) 成分が 1 で, その他の成分が 0 の $M_{m,n}(\mathbf{R})$ の元を E_{ij} と書くことにする. E_{ij} を行列単位とよぶ. このとき, mn 個の行列 E_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ は一次独立となる. 更に, $M_{m,n}(\mathbf{R})$ はこれらの行列で生成されることも分かるから, $\{E_{ij}\ (i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)\}$ は $M_{m,n}(\mathbf{R})$ の基底で,

$$\dim M_{m,n}(\mathbf{R}) = mn.$$

零ベクトルのみからなる集合 $\{0\}$ もベクトル空間となる. これを零空間とよぶ. 零空間の次元は 0 であるとする.
零空間および基底をもつベクトル空間は有限次元であるという. 有限次元でないベクトル空間は無限次元であるという.
無限次元ベクトル空間に対しても基底の概念を考えることができる. これは集合論における選択公理と深く関わることである.

例　§2 において扱ったように, $\mathbf{R}[x]_n$ の $n+1$ 個のベクトル $1, x, x^2, \ldots, x^n$ は一次独立である. 更に,

$$\mathbf{R}[x]_n = \langle 1, x, x^2, \ldots, x^n \rangle_{\mathbf{R}}$$

が成り立つから, $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ は $\mathbf{R}[x]_n$ の基底で,

$$\dim \mathbf{R}[x]_n = n + 1.$$

一方, 実数係数の x の多項式全体からなるベクトル空間 $\mathbf{R}[x]$ は無限次元である.

A を $m \times n$ 行列とし, W を同次形の連立一次方程式 $Ax = 0$ の解空間とする. 即ち,

$$W = \{x \in \mathbf{R}^n | Ax = 0\}$$

である. 連立一次方程式について学んだときのことを言い換えると, 次が成り立つ.

定理　$\dim W = n - \operatorname{rank} A$.

解空間 W の基底を基本解とよぶ.

例　連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

を考える.

係数行列の行に関する基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行} - \text{第 1 行} \times 3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行} \times \left(-\frac{1}{4}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行} - \text{第 2 行} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

だから,

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

また,

$$x_1 - x_3 = 0,\ x_2 + 2x_3 = 0$$

だから,

$$x_1 = c,\ x_2 = -2c,\ x_3 = c \quad (c \in \mathbf{R}).$$

上の連立一次方程式の解空間を W とおくと,

$$W = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbf{R} \right\}.$$

特に, $\dim W = 1$ で, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ は W の基本解である.

上の定理が成り立っていることも容易に確認できる.

ベクトル空間が有限次元であることが分かっている場合は, 基底となりうるベクトルの組は少なくとも次元の分だけの個数のベクトルからなる必要がある. これらが実際に基底となるかどうかは次の定理により調べることができる.

定理 V を n 次元のベクトル空間とし, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ とする. 次の (1)〜(3) は同値.

(1) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ は V の基底.
(2) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ は一次独立.
(3) V は $v_1, v_2, \ldots, v_n$ で生成される.

例 $\mathbf{R}^3$ のベクトル a_1, a_2, a_3 を

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

により定めると,

$$|a_1, a_2, a_3| = 1$$

だから, a_1, a_2, a_3 は一次独立.
また, $\dim \mathbf{R}^3 = 3$.
よって, $\{a_1, a_2, a_3\}$ は $\mathbf{R}^3$ の基底で, $\mathbf{R}^3$ は a_1, a_2, a_3 で生成される.

問題 3

1. 連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

の解空間の次元とその基底を一組求めよ.

2. 実数を成分とする n 次の正方行列全体からなるベクトル空間 $M_n(\mathbf{R})$ の部分集合 W を次の (1)〜(4) により定めると, W は $M_n(\mathbf{R})$ の部分空間となる. それぞれの場合について $\dim W$ とその基底を一組求めよ.

(1) $W = \{X \in M_n(\mathbf{R}) | X$ は対称行列, 即ち ${}^tX = X\}$.

(2) $W = \{X \in M_n(\mathbf{R}) | X$ は交代行列, 即ち ${}^tX = -X\}$.

(3) $W = \{X \in M_n(\mathbf{R}) | X$ は上三角行列, 即ち $i > j$ のとき X の (i, j) 成分は $0\}$.

(4) $W = \{X \in M_n(\mathbf{R}) | \mathrm{tr}\, X = 0\}$. 但し, $\mathrm{tr}\, X$ は X の対角成分の和で, 跡またはトレースとよばれるものである.

3. $a \in \mathbf{R}$ とし, $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbf{R}^4$ を

$$a_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix},\ a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

により定める. $\mathbf{R}^4$ が a_1, a_2, a_3, a_4 で生成されないときの a の値を求めよ.

問題 3 の解答

1. 係数行列の行に関する基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行} - \text{第 1 行} \times 3]{\text{第 2 行} - \text{第 1 行} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行} - \text{第 2 行} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから,

$$x_1 + x_3 + x_4 = 0,\ x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

よって,

$$x_1 = -c_1 - c_2,\ x_2 = -c_1 + c_2,\ x_3 = c_1,\ x_4 = c_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R})$$

だから, 解空間は

$$\left\{ c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\}.$$

従って, 解空間の次元は 2 で, $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ はその基底.

2. (1) $X \in W$ の (i, j) 成分を x_{ij} とすると,

$$x_{ij} = x_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

よって, 行列単位を用いると,

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_{ii} E_{ii} + \sum_{i<j} x_{ij}(E_{ij} + E_{ji}).$$

従って,

$$\begin{aligned} \dim W &= n + \{1 + 2 + \cdots + (n-1)\} \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

また, $\{E_{ii}\ (i = 1, 2, \ldots, n),\ E_{ij} + E_{ji}\ (1 \leq i < j \leq n)\}$ は W の基底.

(2) $X \in W$ の (i, j) 成分を x_{ij} とすると,

$$x_{ij} = -x_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

よって, 行列単位を用いると,

$$X = \sum_{i<j} x_{ij}(E_{ij} - E_{ji}).$$

従って,

$$\begin{aligned} \dim W &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) \\ &= \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

また, $\{E_{ij} - E_{ji}\ (1 \leq i < j \leq n)\}$ は W の基底.

(3) $X \in W$ の (i, j) 成分を x_{ij} として, 行列単位を用いると,

$$X = \sum_{i \leq j} x_{ij} E_{ij}.$$

よって,

$$\begin{aligned} \dim W &= 1 + 2 + \cdots + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

また, $\{E_{ij}\ (1 \leq i \leq j \leq n)\}$ は W の基底.

(4) $X \in W$ の (i, j) 成分を x_{ij} とすると,

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ii} = 0.$$

よって, 行列単位を用いると,

$$X = \sum_{i \neq j} x_{ij} E_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{ii}(E_{ii} - E_{nn}).$$

従って,

$$\dim W = n^2 - 1.$$

また, $\{E_{ij}\ (i \neq j),\ E_{ii} - E_{nn}\ (i = 1, 2, \ldots, n-1)\}$ は W の基底.

3. $\dim \mathbf{R}^4 = 4$ だから, $\mathbf{R}^4$ が a_1, a_2, a_3, a_4 で生成されないのは a_1, a_2, a_3, a_4 が一次従属のとき, 即ち, $|a_1, a_2, a_3, a_4| = 0$ のときである.
ここで,

$$\begin{aligned} |a_1, a_2, a_3, a_4| &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \\ &= \left| \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} a+1 & 2 \\ 2 & a+1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix} \\ &= \{(a+1)^2 - 4\}(a-1)^2 \\ &= (a+3)(a-1)^3. \end{aligned}$$

よって, 求める値は

$$a = -3, 1.$$