§5. 線形写像

一つの集合からもう一つの集合への対応は写像とよばれる. 線形代数ではこの集合としてはベクトル空間, 写像としては線形写像とよばれるものを考える.

定義 U, V をベクトル空間, f を U から V への写像とする. f は次の (1), (2) をみたすとき, 線形写像とよぶ.

(1) 任意の $u, v \in U$ に対し $f(u+v) = f(u) + f(v)$.
(2) 任意の $c \in \mathbf{R}$ および任意の $u \in U$ に対し $f(cu) = cf(u)$.

上の (2) より, 線形写像は零ベクトルを零ベクトルへ写すことに注意しよう. 実際,

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0 \cdot 0) \\ &= 0f(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である.
また, すべてのベクトルを零ベクトルへ写す写像は上の (1), (2) をみたすから, 線形写像となる. これを零写像とよぶ.
次の例が最も親しみのある線形写像かもしれない.

例 $m \times n$ 行列 A を固定しておき, $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への写像 f_A を行列の積を用いて,

$$f_A(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める.
このとき, f_A は線形写像となる. 実際, $x, y \in \mathbf{R}^n$ とすると,

$$\begin{aligned} f_A(x+y) &= A(x+y) \\ &= Ax + Ay \\ &= f_A(x) + f_A(y) \end{aligned}$$

となるから, (1) の性質が成り立つ.
また, $c \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^n$ とすると,

$$\begin{aligned} f_A(cx) &= A(cx) \\ &= cAx \\ &= cf_A(x) \end{aligned}$$

となるから, (2) の性質も成り立つ.

実は $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像はすべて上の例のようにして得られるのである. 即ち, 次が成り立つ.

命題 f を $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像とする. このとき, ある $m \times n$ 行列 A が存在し,

$$f(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

と表される.

証明　$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}$ をそれぞれ $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ の標準基底とする.
このとき, 各 $j = 1, 2, \ldots, n$ に対し $f(e_j)$ を $e'_1, e'_2, \ldots, e'_m$ の一次結合で

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + a_{2j}e'_2 + \cdots + a_{mj}e'_m \quad (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj} \in \mathbf{R})$$

と表すことができる.

よって, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ として, 線形写像の性質を用いると,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) \\ &= x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \cdots + x_nf(e_n) \\ &= x_1(a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \cdots + a_{m1}e'_m) + x_2(a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \cdots + a_{m2}e'_m) + \cdots \\ &\quad + x_n(a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \cdots + a_{mn}e'_m) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

従って, (i, j) 成分が a_{ij} の $m \times n$ 行列を A とおくと,

$$f(x) = Ax.$$

□

微分や積分といった操作も上の線形写像の定義に現れた性質をみたしている. 但し, 厳密に線形写像とよぶにはベクトル空間をきちんと設定する必要がある上, よく使われる例ではそれらは関数空間とよばれる無限次元のベクトル空間である.
さて, ベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像 f に対し, V の部分集合 $\mathrm{Im}\, f$ および U の部分集合 $\mathrm{Ker}\, f$ を

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(u) | u \in U\},\ \mathrm{Ker}\, f = \{u \in U | f(u) = 0\}$$

により定める. $\mathrm{Im}\, f$ を f の像, $\mathrm{Ker}\, f$ を f の核とよぶ. 特に, $\mathrm{Im}\, f = V$ は f が上への写像または全射とよばれるものであることを意味する. 実は $\mathrm{Im}\, f$ および $\mathrm{Ker}\, f$ はそれぞれ V および U の部分空間となる. §1 で扱ったことを思い出しながら証明してみよう.

定理　$\mathrm{Im} f$ は V の部分空間.

証明　まず,

$$0 = f(0) \in \mathrm{Im}\, f.$$

次に,

$$f(u_1), f(u_2) \in \mathrm{Im}\, f \quad (u_1, u_2 \in U)$$

とすると,

$$f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2) \in \mathrm{Im}\, f.$$

更に,

$$c \in \mathbf{R},\ f(u) \in \mathrm{Im}\, f\ (u \in U)$$

とすると,

$$cf(u) = f(cu) \in \mathrm{Im}\, f.$$

よって, $\mathrm{Im} f$ は V の部分空間. □

定理 $\mathrm{Ker}\, f$ は U の部分空間.

証明 まず,

$$f(0) = 0$$

だから,

$$0 \in \mathrm{Ker}\, f.$$

次に, $u_1, u_2 \in \mathrm{Ker}\, f$ とすると,

$$\begin{aligned} f(u_1 + u_2) &= f(u_1) + f(u_2) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

だから,

$$u_1 + u_2 \in \mathrm{Ker}\, f.$$

更に, $c \in \mathbf{R}$, $u \in \mathrm{Ker}\, f$ とすると,

$$\begin{aligned} f(cu) &= cf(u) \\ &= c0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

だから,

$$cu \in \mathrm{Ker}\, f.$$

よって, $\mathrm{Ker}\, f$ は U の部分空間. □

f をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像とし, U は有限次元であるとする. このとき, $\mathrm{Im} f$ および $\mathrm{Ker}\, f$ はともに有限次元のベクトル空間となる. $\dim \mathrm{Im}\, f$ を f の階数とよび, $\mathrm{rank}\, f$ と書く. また, $\dim \mathrm{Ker}\, f$ を f の退化次数とよび, $\mathrm{null}\, f$ と書く. 階数および退化次数について, 次が成り立つ.

次元定理 $\mathrm{rank}\, f + \mathrm{null}\, f = \dim U$.

例 f_A を最初の例に現れた線形写像とすると,

$$\mathrm{Ker}\, f_A = \{x \in \mathbf{R}^n | Ax = 0\}.$$

即ち, $\mathrm{Ker}\, f_A$ は同次形の連立一次方程式 $Ax = 0$ の解空間だから,

$$\mathrm{null}\, f_A = n - \mathrm{rank}\, A.$$

また, f_A は $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像だから, 次元定理より,

$$\mathrm{rank}\, f_A = \mathrm{rank}\, A.$$

問題 5

1. U, V, W をベクトル空間, f を U から V への線形写像, g を V から W への線形写像とする. このとき, f と g の合成写像とよばれる U から W への写像 $g \circ f$ を考えることができる. 即ち,

$$(g \circ f)(u) = g(f(u)) \quad (u \in U)$$

である. $g \circ f$ は線形写像であることを示せ.

2. f をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像とし, $u_1, u_2, \ldots, u_m \in U$ とする. $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_m)$ が一次独立ならば, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ も一次独立であることを示せ.

3. f をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像とする. $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ であることと f が 1 対 1 の写像または単射とよばれるものであること, 即ち

$$f(u) = f(v) \quad (u, v \in U)$$

ならば, $u = v$ となることとは同値であることを示せ.

4. f をベクトル空間 V から V 自身への線形写像とする. このとき, f は V の線形変換とよばれる. f と f 自身の合成写像 $f \circ f$ が零写像であることと $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$ であることとは同値であることを示せ.

5. m 次元数ベクトル空間 $\mathbf{R}^m$ の n 個のベクトル $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対し $m \times n$ 行列 A を

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

により定める.
$a_1, a_2, \ldots, a_n$ の中に r 個の一次独立なベクトルが存在し, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ のどの $r+1$ 個のベクトルも一次従属であるとする. このとき, $\mathrm{rank}\, A = r$ となることが分かる.
また, $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ が $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の中の r 個の一次独立なベクトルであるとし, $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像 f_A を

$$f_A(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定めると, $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\}$ は $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底となることが分かる.
A を次の (1), (2) により定めるとき, $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底を一組求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

問題 5 の解答

1. まず, $u, v \in U$ とすると,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(u+v) &= g(f(u+v)) \\ &= g(f(u)+f(v)) \\ &= g(f(u))+g(f(v)) \\ &= (g \circ f)(u)+(g \circ f)(v).\end{aligned}$$

次に, $c \in \mathbf{R}$, $u \in U$ とすると,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(cu) &= g(f(cu)) \\ &= g(cf(u)) \\ &= cg(f(u)) \\ &= c(g \circ f)(u).\end{aligned}$$

よって, $g \circ f$ は線形写像.

2. $u_1, u_2, \ldots, u_m$ の一次関係

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_mu_m = 0 \quad (c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbf{R})$$

を考えると,

$$f(c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_mu_m) = f(0).$$

f は線形写像だから,

$$c_1f(u_1) + c_2f(u_2) + \cdots + c_mf(u_m) = 0.$$

$f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_m)$ は一次独立だから,

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0.$$

よって, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ は一次独立.

3. まず, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ であると仮定する.
$u, v \in V$ が

$$f(u) = f(v)$$

をみたすとすると, f は線形写像だから,

$$f(u-v) = 0.$$

仮定より,

$$u - v = 0.$$

即ち,

$$u = v.$$

よって, f は単射.
逆に, f が単射であると仮定する.

$u \in \operatorname{Ker} f$ とすると,

$$\begin{aligned} f(u) &= 0 \\ &= f(0). \end{aligned}$$

仮定より,

$$u = 0.$$

よって,

$$\operatorname{Ker} f = \{0\}.$$

4. まず, $f \circ f$ が零写像であると仮定する.
$f(u) \in \operatorname{Im} f$ $(u \in U)$ とすると, 仮定より,

$$\begin{aligned} f(f(u)) &= (f \circ f)(u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって,

$$f(u) \in \operatorname{Ker} f.$$

従って,

$$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f.$$

逆に, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ であると仮定する.
$u \in U$ とすると, $f(u) \in \operatorname{Im} f$ だから, 仮定より,

$$\begin{aligned} 0 &= f(f(u)) \\ &= (f \circ f)(u). \end{aligned}$$

よって, $f \circ f$ は零写像.

5. (1) 2 個のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は一次独立で, 3 個のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は一次従属だから, $\operatorname{rank} A = 2$ で, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} f_A$ の基底.

(2) 2 個のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は一次独立で, A の列ベクトルからどの 3 個を選んでもそれらは一次従属だから, $\operatorname{rank} A = 2$ で, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} f_A$ の基底.