§8. 一般の線形変換の場合

§7 において扱ったように, 正方行列の定める自然な線形変換に対する固有値や固有ベクトルは, 固有方程式を解くことによって順次求められるのであった. それでは一般の線形変換の場合はどのようにすればよいのであろうか? 以下ではベクトル空間は有限次元であるとして, §6 において扱ったことを思い出してみよう. 線形写像は基底を固定しておけば, 表現行列とよばれる行列が対応するのであった. 特に, 線形変換の場合は表現行列は正方行列となる. よって, この表現行列に対して固有方程式を解いていけばよいであろう.
f をベクトル空間 V の線形変換, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ を V の基底, A を基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に関する f の表現行列とする. f の固有多項式 $\phi_f(t)$ を A の固有多項式 $\phi_A(t)$ を用いて,

$$\phi_f(t) = \phi_A(t)$$

により定める. また, 方程式 $\phi_f(t) = 0$ を f の固有方程式とよぶ.

注意　表現行列は基底に依存するものであるから, 本来ならば

$$\phi_{f,\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}}(t) = \phi_A(t)$$

のように記号を定めるべきであろう. しかし, 実は上のように定めた $\phi_f(t)$ は基底の選び方に依存しないのである. 実際, $\{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ を別の V の基底, P を基底変換 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \to \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ の基底変換行列, B を基底 $\{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ 関する f の表現行列とすると,

$$B = P^{-1}AP$$

が成り立つから, 行列式の性質を用いると,

$$\begin{aligned}
\phi_B(t) &= |tE - B| \\
&= |tP^{-1}EP - P^{-1}AP| \\
&= |P^{-1}(tE - A)P| \\
&= |P^{-1}||tE - A||P| \\
&= |tE - A| \\
&= \phi_A(t).
\end{aligned}$$

数学ではこのようなとき, 定義は well-defined であるという.

次に示すように, 固有値と固有多項式の解の関係について, 正方行列の場合と全く同様のことが成り立つ.

定理　f をベクトル空間 V の線形変換とする. λ が f の固有値であるための必要十分条件は λ が f の固有方程式の実数解であること.

証明　$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ を V の基底, A を基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に関する f の表現行列, u を固有値 λ に対する f の固有ベクトル, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に関する u の成分とし,

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおく.

このとき,

$$\begin{aligned} f(u) &= f(x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n) \\ &= x_1f(u_1) + x_2f(u_2) + \cdots + x_nf(u_n) \\ &= (f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n))x \\ &= (u_1, u_2, \ldots, u_n)(Ax). \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned} f(u) &= \lambda u \\ &= \lambda(x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n) \\ &= (u_1, u_2, \ldots, u_n)(\lambda x). \end{aligned}$$

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ は一次独立だから,

$$Ax = \lambda x.$$

ここで, $u \neq 0$ だから,

$$x \neq 0.$$

よって, x は A の固有値 λ に対する固有ベクトルとなるから, λ は A の固有方程式の実数解.
従って,

$$\begin{aligned} \phi_f(\lambda) &= \phi_A(\lambda) \\ &= 0 \end{aligned}$$

だから, λ は f の固有方程式の実数解.
上の計算は逆に辿ることもできる. □

上の証明は固有ベクトルの求め方もあたえていることに注意しよう. なぜならば, A の固有ベクトルの成分が, 考えている基底に関する f の固有ベクトルの成分となっていることを示しているからである.
また, u から x への対応により, V は $\mathbf{R}^n$ と同一視できることが分かる. 即ち, この対応は V から $\mathbf{R}^n$ への同型写像をあたえ, V と $\mathbf{R}^n$ は同型となる.

例 $\mathbf{R}[x]_2$ から $\mathbf{R}[x]_2$ 自身への写像 T を

$$T(f(x)) = f(1-x) \quad (f(x) \in \mathbf{R}[x]_2)$$

により定めると, T は $\mathbf{R}[x]_2$ の線形変換を定める. 実際, $f(x), g(x) \in \mathbf{R}[x]_2$, $c \in \mathbf{R}$ とすると,

$$T(f(x) + g(x)) = T(f(x)) + T(g(x)),\ T(cf(x)) = cT(f(x))$$

となることが容易に分かる.
ここで,

$$\begin{aligned} (T(1), T(x), T(x^2)) &= (1, 1-x, (1-x)^2) \\ &= (1, 1-x, 1-2x+x^2) \\ &= (1, x, x^2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

だから, $\mathbf{R}[x]_2$ の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列を A とおくと,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって, T の固有多項式は

$$\begin{aligned} \phi_T(t) &= \phi_A(t) \\ &= \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ 0 & t+1 & 2 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t+1)(t-1)^2. \end{aligned}$$

従って, T の固有値は -1 と 1.
次に, 固有値 -1 に対する T の固有空間 $W(-1)$ を求める.
連立一次方程式

$$(-E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

を考える. 即ち,

$$-2x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ x_3 = 0$$

である.
よって,

$$x_1 = c,\ x_2 = -2c,\ x_3 = 0 \quad (c \in \mathbf{R}).$$

従って,

$$W(-1) = \{c(1-2x) | c \in \mathbf{R}\}.$$

更に, 固有値 1 に対する T の固有空間 $W(1)$ を求める.
連立一次方程式

$$(E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

を考える. 即ち,

$$-x_2 - x_3 = 0$$

である.
よって,

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ x_3 = -c_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}).$$

従って,

$$W(1) = \{c_1 + c_2(x - x^2) | c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}.$$

問題 8

1. $\mathbf{R}[x]_2$ から $\mathbf{R}[x]_2$ への写像 T を

$$T(f(x)) = f(-x) + f'(x) \quad (f(x) \in \mathbf{R}[x]_2)$$

により定めると, T は $\mathbf{R}[x]_2$ の線形変換を定める.
(1) $\mathbf{R}[x]_2$ の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列を求めよ.
(2) T の固有値を求めよ.
(3) T の各固有値に対する固有空間を求めよ.

2. $\mathbf{R}[x]_2$ から $\mathbf{R}[x]_2$ への写像 T を

$$T(f(x)) = 2f(x) + \int_0^1 f(x)dx \quad (f(x) \in \mathbf{R}[x]_2)$$

により定めると, T は $\mathbf{R}[x]_2$ の線形変換を定める.
(1) $\mathbf{R}[x]_2$ の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列を求めよ.
(2) T の固有値を求めよ.

3. 2 次の正方行列全体からなるベクトル空間 $M_2(\mathbf{R})$ の部分集合 W を

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

により定めると, W は $M_2(\mathbf{R})$ の部分空間となる. また,

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと, $\{E_1, E_2\}$ は W の基底となる. 更に, $A \in W$ を固定しておき,

$$f(X) = AX \quad (X \in W)$$

とおくと, f は W の線形変換を定めることが分かる.

(1) 基底 $\{E_1, E_2\}$ に関する f の表現行列を求めよ.
(2) f の固有値を求めよ.

問題 8 の解答

1. (1) 求める表現行列を A とおくと,

$$\begin{aligned}(T(1), T(x), T(x^2)) &= (1, -x+1, (-x)^2+2x) \\ &= (1, 1-x, 2x+x^2) \\ &= (1, x, x^2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

だから,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) T の固有多項式は

$$\begin{aligned}\phi_T(t) &= \phi_A(t) \\ &= \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 0 \\ 0 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t+1)(t-1)^2.\end{aligned}$$

従って, T の固有値は -1 と 1.

(3) まず, 固有値 -1 に対する T の固有空間 $W(-1)$ を求める.
連立一次方程式

$$(-E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

を考えると,

$$-2x_1 - x_2 = 0,\ x_3 = 0.$$

よって,

$$x_1 = c,\ x_2 = -2c,\ x_3 = 0 \quad (c \in \mathbf{R}).$$

従って,

$$W(-1) = \{c(1-2x) | c \in \mathbf{R}\}.$$

次に, 固有値 1 に対する T の固有空間 $W(1)$ を求める.
連立一次方程式

$$(E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

を考えると,

$$x_2 = 0,\ 2x_2 - 2x_3 = 0.$$

よって,

$$x_1 = c,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0 \quad (c \in \mathbf{R}).$$

従って,

$$W(1) = \{c | c \in \mathbf{R}\}.$$

2. (1) 求める表現行列を A とおくと,

$$\begin{aligned}(T(1), T(x), T(x^2)) &= \left(2+1, 2x+\frac{1}{2}, 2x^2+\frac{1}{3}\right) \\ &= \left(3, \frac{1}{2}+2x, \frac{1}{3}+2x^2\right) \\ &= (1, x, x^2)\begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

だから,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) T の固有多項式は

$$\begin{aligned}\phi_T(t) &= \phi_A(t) \\ &= \begin{pmatrix} t-3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \\ &= (t-2)^2(t-3).\end{aligned}$$

従って, T の固有値は 2 と 3.

3. (1) $A = aE_1 + bE_2$ と表しておくと,

$$\begin{aligned}(f(E_1), f(E_2)) &= ((aE_1+bE_2)E_1, (aE_1+bE_2)E_2) \\ &= (aE_1+bE_2, bE_1+aE_2) \\ &= (E_1, E_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \\ &= (E_1, E_2)A.\end{aligned}$$

よって, 求める表現行列は A に一致する.

(2) f の固有多項式は

$$\begin{aligned}\phi_f(t) &= \phi_A(t) \\ &= \begin{vmatrix} t-a & -b \\ -b & t-a \end{vmatrix} \\ &= (t-a)^2 - b^2.\end{aligned}$$

よって, f の固有値は $a \pm b$.