§9. 対角化

有限次元ベクトル空間の線形変換は基底を選ぶことにより, 表現行列とよばれる正方行列と対応した. 実際の計算では, 表現行列はできるだけ計算しやすい形である方が望ましい. このようなものとしては Jordan 標準形とよばれるものが最も一般的であるが, 特別な条件の下ではこれは対角成分以外の成分がすべて 0 の正方行列, 即ち対角行列となる.
線形変換に対する表現行列 A は基底変換により, 正則行列 P を用いて

$$B = P^{-1}AP$$

と変わるのであった. ここでは, 上手く P を選んで B が対角行列となるのはどのようなときであるのかを考えよう. そこで次のように定義する.

定義　A, B を n 次の正方行列とする. n 次の正則行列 P が存在し,

$$B = P^{-1}AP$$

となるとき, A と B は相似であるという.
B が対角行列のとき, A は P によって対角化される, または対角化可能であるという.

相似という関係は集合論において扱う同値関係の例である. 即ち, 次が成り立つ.

命題　A, B, C を n 次の正方行列とすると, 次の (1)〜(3) が成り立つ.
(1) A と A は相似.
(2) A と B が相似ならば, B と A は相似.
(3) A と B および B と C が相似ならば, A と C は相似.

証明　(1): E を n 次の単位行列とすると, E は正則で,

$$A = E^{-1}AE.$$

よって, A と A は相似.
(2): 仮定より, n 次の正則行列 P が存在し

$$B = P^{-1}AP.$$

よって,

$$\begin{aligned} A &= PBP^{-1} \\ &= (P^{-1})^{-1}BP^{-1}. \end{aligned}$$

P^{-1} は正則だから, B と A は相似.
(3): 仮定より, n 次の正則行列 P, Q が存在し

$$B = P^{-1}AP,\ C = Q^{-1}BQ.$$

よって,

$$\begin{aligned} C &= Q^{-1}(P^{-1}AP)Q \\ &= (PQ)^{-1}A(PQ). \end{aligned}$$

PQ は正則だから, A と C は相似. □

上の命題より, 対角化可能性の問題は集合論の言葉を使えば, あたえられた正方行列を含む同値類の中で, 代表元として対角行列を選ぶことができるのかどうかという問題に言い換えることができる.
さて, A を対角化可能な n 次の正方行列としよう. 定義より, n 次の正則行列 P が存在し,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と表される. 即ち,

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる.
更に, P を

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

と列ベクトルに分割しておくと,

$$Ap_i = \lambda_i p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

となる. ここで, P は正則だから, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ は一次独立で, 各 p_i は零ベクトルではない. よって, λ_i は A の固有値で, p_i は固有値 λ_i に対する A の固有ベクトルである.
上の計算は逆に辿ることもできるから, 次が得られたことになる.

定理　A を n 次の正方行列とする. A が対角化可能であるための必要十分条件は n 個の一次独立な A の固有ベクトルが存在すること.

次の定理は固有ベクトルまで調べなくても, 固有値のみで対角化可能性が判定できる場合である.

定理　A が n 個の相異なる固有値をもつ n 次の正方行列ならば, A は対角化可能.

上の定理が成り立つ根拠は, 相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とすると, 各 λ_i に対する A の固有空間の次元が 1, 即ち

$$\dim(W(\lambda_i)) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

で, 各固有値に対する固有ベクトルを並べて得られる n 個のベクトルが一次独立となることが分かるからである. この定理は次のように一般化することができる.

定理　A を n 次の正方行列, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ を A のすべての相異なる固有値とする. A が対角化可能であるための必要十分条件は

$$\sum_{i=1}^{r} \dim(W(\lambda_i)) = n.$$

例　2 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の対角化を考える.
まず, A の固有多項式は

$$\begin{aligned}\phi_A(t) &= \begin{vmatrix} t-1 & -4 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t-1)^2 - (-4)(-1) \\ &= t^2 - 2t - 3 \\ &= (t+1)(t-3).\end{aligned}$$

よって, A は 2 個の相異なる固有値 $-1, 3$ をもつから, 対角化可能.
次に, 固有値 -1 に対する A の固有ベクトルを求める.
連立一次方程式

$$(-E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

を考えると,

$$-x_1 - 2x_2 = 0.$$

よって, ベクトル $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 -1 に対する A の固有ベクトル.
更に, 固有値 3 に対する A の固有ベクトルを求める.
連立一次方程式

$$(3E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

を考えると,

$$-x_1 + 2x_2 = 0.$$

よって, ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 3 に対する A の固有ベクトル.
従って,

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと, P は正則で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

なお, P は一次独立な A の固有ベクトルを並べさえすればよいのだから, 一通りには決まらない. 例えば, P は

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおいてもよい.

問題 9

1. 正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ.

(2) 自然数 n に対し A^n を求めよ.

2. 正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は 1 と 2 の 2 個である. $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ.

問題 9 の解答

1. (1) まず, A の固有多項式は

$$\begin{aligned}\phi_A(t) &= \begin{vmatrix} t-1 & -3 \\ -2 & t-2 \end{vmatrix} \\ &= (t-1)(t-2)-(-3)(-2) \\ &= t^2-3t-4 \\ &= (t+1)(t-4).\end{aligned}$$

よって, A は 2 個の相異なる固有値 $-1, 4$ をもつから, 対角化可能.
次に, 固有値 -1 に対する A の固有ベクトルを求める.
連立一次方程式

$$(-E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

を考えると,

$$-2x_1-3x_2=0.$$

よって, ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ は固有値 -1 に対する A の固有ベクトル.
更に, 固有値 4 に対する A の固有ベクトルを求める.
連立一次方程式

$$(4E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

を考えると,

$$-2x_1+2x_2=0.$$

よって, ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 4 に対する A の固有ベクトル.
従って,

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと, P は正則で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) (1) より,

$$\begin{aligned}A^n &= P\underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{n\text{ 個}}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3(-1)^n & 4^n \\ -2(-1)^n & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3(-1)^n + 2\cdot 4^n & -3(-1)^n + 3\cdot 4^n \\ -2(-1)^n + 2\cdot 4^n & 2(-1)^n + 3\cdot 4^n \end{pmatrix}.$$

2. まず, 固有値 1 に対する A の固有空間 $W(1)$ を求める.
連立一次方程式

$$(E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

を考えると,

$$-x_2 - x_3 = 0.$$

よって,

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ x_3 = -c_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}).$$

従って,

$$W(1) = \left\{ c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\}.$$

次に, 固有値 2 に対する A の固有空間 $W(2)$ を求める.
連立一次方程式

$$(2E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

を考えると,

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ x_3 = 0.$$

よって,

$$x_1 = c,\ x_2 = c,\ x_3 = 0 \quad (c \in \mathbf{R}).$$

従って,

$$W(2) = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbf{R} \right\}.$$

以上より,

$$\begin{aligned} \dim W(1) + \dim W(2) &= 2 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

だから, A は対角化可能で,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと, P は正則で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$