

§10. 内積空間

ここではベクトル空間に対し内積とよばれる新たな構造を考える。内積によってベクトルの長さやベクトル同士の直交性を考えることができるようになる。

定義 V をベクトル空間とし, $u, v, w \in V, c \in \mathbf{R}$ とする。任意のベクトル u, v に対し実数 $\langle u, v \rangle$ が定まり, 次の(1)~(4)をみたすとき, $\langle u, v \rangle$ を u と v の内積, 対応 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を V の内積, 組 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を内積空間とよぶ。

- (1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.
- (2) $\langle cu, v \rangle = c\langle u, v \rangle$.
- (3) $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$.
- (4) $u \neq 0$ ならば, $\langle u, u \rangle > 0$.

以下では内積の記号は常に $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用いることにして, 内積空間は単に V と書くことにする。また, ここでは \mathbf{R} 上のベクトル空間を考えているが, \mathbf{C} 上のベクトル空間に対する内積は Hermite 内積とよばれ, 定義は上とは若干異なるものとなる。

零ベクトルとの内積は 0 となることに注意しよう。実際, (2) より,

$$\begin{aligned}\langle 0, u \rangle &= \langle 0 \cdot 0, u \rangle \\ &= 0 \langle 0, u \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

で, 更に (3) より,

$$\begin{aligned}\langle u, 0 \rangle &= \langle 0, u \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

となるからである。

また,

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle, \quad \langle u, cv \rangle = c\langle u, v \rangle$$

が成り立つことも容易に確かめることができる。

次の例は $n = 2, 3$ の場合には既に親しみのあるものであろう。

例 (標準内積)

\mathbf{R}^n のベクトル

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に対し

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

とおくと, 対応 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は上の(1)~(4)の性質をみたし, \mathbf{R}^n の内積を定めることが分かる。これを \mathbf{R}^n の標準内積とよぶ。

なお, この場合は行列を使って

$$\langle x, y \rangle = {}^t x y$$

と表すこともできる。もちろん1次の正方行列は普通の実数と同一視している。

例 $f(x), g(x) \in \mathbf{R}[x]_n$ に対し

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

とおくと、対応 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は上の(1)～(4)の性質をみたし、 $\mathbf{R}[x]_n$ の内積を定めることが分かる。

V を内積空間とすると、任意の $u \in V$ に対し

$$\langle u, u \rangle \geq 0$$

となるから、

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

とおくことができる。内積の定義における(4)と定義の直後に注意したことより、 $\|u\| = 0$ となるのは $u = 0$ のときのみである。 $\|u\|$ を u のノルムまたは長さ、対応 $\|\cdot\|$ を V のノルムとよぶ。ノルムに関して次が成り立つ。

定理 V を内積空間とし、 $u, v \in V, c \in \mathbf{R}$ とすると、 V のノルム $\|\cdot\|$ に関して次の(1)～(3)が成り立つ。

- (1) $\|cu\| = |c|\|u\|$.
- (2) $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\|$ (Cauchy-Schwarz の不等式).
- (3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (三角不等式).

証明 (1): ノルムの定義および内積の性質より、

$$\begin{aligned} \|cu\| &= \sqrt{\langle cu, cu \rangle} \\ &= \sqrt{c\langle u, cu \rangle} \\ &= \sqrt{c^2\langle u, u \rangle} \\ &= |c|\sqrt{\langle u, u \rangle} \\ &= |c|\|u\|. \end{aligned}$$

(2): $v = 0$ のときは明らか。

$v \neq 0$ のとき、

$$\langle v, v \rangle > 0$$

に注意すると、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle u - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle}v, u - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle}v \right\rangle \langle v, v \rangle \\ &= \left(\langle u, u \rangle - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \langle u, v \rangle - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \langle v, u \rangle + \frac{\langle u, v \rangle^2}{\langle v, v \rangle^2} \langle v, v \rangle \right) \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2\|v\|^2 - |\langle u, v \rangle|^2. \end{aligned}$$

よって、

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2.$$

即ち、

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

(3): (2) より,

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2.\end{aligned}$$

よって,

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

□

なお, Cauchy-Schwarz の不等式の等号成立は u, v が一次従属のときに限ることが証明から分かる.

中線定理 V を内積空間とし, $u, v \in V$ とすると, V のノルム $\| \cdot \|$ に関して次が成り立つ.

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

証明 ノルムの定義および内積の性質より,

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= \langle u+v, u+v \rangle + \langle u-v, u-v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 + \|u\|^2 + 2\langle u, -v \rangle + \|v\|^2 \\ &= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).\end{aligned}$$

□

内積空間 V の二つのベクトル u, v に対し, $\langle u, v \rangle = 0$ が成り立つとき, u と v は直交するという.

定理 u_1, u_2, \dots, u_m を内積空間 V の零ベクトルでないベクトルとする. u_1, u_2, \dots, u_m は互いに直交するならば, 一次独立.

証明 u_1, u_2, \dots, u_m の一次関係

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_m u_m = 0 \quad (c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbf{R})$$

を考えると, $i = 1, 2, \dots, m$ のとき,

$$\begin{aligned}0 &= \langle u_i, 0 \rangle \\ &= \langle u_i, c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_m u_m \rangle \\ &= c_1 \langle u_i, u_1 \rangle + c_2 \langle u_i, u_2 \rangle + \cdots + c_m \langle u_i, u_m \rangle.\end{aligned}$$

仮定より, $i \neq j$ のとき,

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0$$

だから,

$$c_i \langle u_i, u_i \rangle = 0.$$

$u_i \neq 0$ だから,

$$c_i = 0.$$

よって, u_1, u_2, \dots, u_m は一次独立.

□

問題 10

1. \mathbf{R}^3 のベクトル

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

に対し $x \times y \in \mathbf{R}^3$ を

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - y_2 x_3 \\ x_3 y_1 - y_3 x_1 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

により定める. \mathbf{R}^3 の標準内積を考えると, 次の(1), (2)が成り立つことを示せ. なお, $x \times y$ は x と y の外積とよばれる.

(1) $x, y \in \mathbf{R}^3$ とすると, $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2$.

(2) $x, y, z \in \mathbf{R}^3$ とすると, $\langle x \times y, z \rangle = |x, y, z|$. なお, $\langle x \times y, z \rangle$ は x, y, z の3重積とよばれる.

2. \mathbf{R}^n の標準内積を考える. A を n 次の正方行列とすると, 任意の $x, y \in \mathbf{R}^n$ に対し

$$\langle x, Ay \rangle = \langle {}^t A x, y \rangle$$

が成り立つことを示せ.

3. 内積空間 V の部分空間 W に対し V の部分集合 W^\perp を

$$W^\perp = \{u \in V \mid \text{任意の } v \in W \text{ に対し } \langle u, v \rangle = 0\}$$

により定める.

(1) W^\perp は V の部分空間であることを示せ. なお, W^\perp は W の直交補空間とよばれる.

(2) $W \cap W^\perp = \{0\}$ が成り立つことを示せ.

4. \mathbf{R}^3 の部分空間 W を

$$W = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

により定める. \mathbf{R}^3 の標準内積を考えるとき, W の直交補空間 W^\perp を求めよ.

問題 10 の解答

1. (1) x, y を問題文のように成分で表しておくと,

$$\begin{aligned}\|x \times y\|^2 &= \langle x \times y, x \times y \rangle \\&= (x_2y_3 - y_2x_3)^2 + (x_3y_1 - y_3x_1)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2 \\&= x_2^2y_3^2 - 2x_2x_3y_2y_3 + x_3^2y_1^2 + x_3^2y_1^2 - 2x_3x_1y_3y_1 + x_1^2y_3^2 \\&\quad + x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2.\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 &= \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2 \\&= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\&= x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_3^2y_3^2 + x_1^2y_3^2 + x_2^2y_1^2 + x_3^2y_2^2 \\&\quad + x_3^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_3^2y_3^2 - x_1^2y_1^2 - x_2^2y_2^2 - x_3^2y_3^2 \\&\quad - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_3x_1y_3y_1 - 2x_2x_3y_2y_3 \\&= x_1^2y_2^2 + x_1^2y_3^2 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_3^2 + x_3^2y_1^2 + x_3^2y_2^2 \\&\quad - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_3x_1y_3y_1 - 2x_2x_3y_2y_3.\end{aligned}$$

よって,

$$\|x \times y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2.$$

(2) z も x, y と同様に $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ と表しておくと,

$$\begin{aligned}\langle x \times y, z \rangle &= (x_2y_3 - y_2x_3)z_1 + (x_3y_1 - y_3x_1)z_2 + (x_1y_2 - y_1x_2)z_3 \\&= z_1x_2x_3 - z_1y_2x_3 + y_1z_2x_3 - x_1z_2y_3 + x_1y_2z_3 - y_1x_2z_3 \\&= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\&= |x, y, z|.\end{aligned}$$

2. 標準内積を行列の積を用いて表すと,

$$\begin{aligned}\langle x, Ay \rangle &= {}^t x(Ay) \\&= ({}^t x A)y \\&= ({}^t x {}^{tt} A)y \\&= {}^t ({}^t A x)y \\&= \langle {}^t A x, y \rangle.\end{aligned}$$

3. (1) $v \in W$ とする.

まず,

$$\langle 0, v \rangle = 0$$

だから,

$$0 \in W^\perp.$$

次に, $u_1, u_2 \in W^\perp$ とすると,

$$\begin{aligned}\langle u_1 + u_2, v \rangle &= \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle \\ &= 0 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

だから,

$$u_1 + u_2 \in W^\perp.$$

更に, $c \in \mathbf{R}, u \in W^\perp$ とすると,

$$\begin{aligned}\langle cu, v \rangle &= c \langle u, v \rangle \\ &= c0 \\ &= 0\end{aligned}$$

だから,

$$cu \in W^\perp.$$

よって, W^\perp は V の部分空間.

(2) $u \in W \cap W^\perp$ とすると,

$$\langle u, u \rangle = 0.$$

よって,

$$u = 0.$$

4. $x \in W^\perp, y \in W$ とすると,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R})$$

と表されるから,

$$\begin{aligned}0 &= \langle x, y \rangle \\ &= c_1(x_1 - x_3) + c_2(x_2 - x_3).\end{aligned}$$

c_1, c_2 は任意だから,

$$x_1 - x_3 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0.$$

即ち,

$$x_1 = c, \quad x_2 = c, \quad x_3 = c \quad (c \in \mathbf{R}).$$

従つて,

$$W^\perp = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbf{R} \right\}.$$